Aufgabenblock 1

1.1: Lösen Sie folgenden Ausdruck nach x auf:

$$\frac{5x-5}{2\pi-\omega}=\omega-\delta$$

1.2: Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\frac{\delta+a}{x}+\frac{x^2(\delta+a)}{x^3}+\frac{1}{x}-\frac{x^5(\delta+a)}{x^6}$$

1.3: Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf:

$$m^4-x^8=16(m^2-x^4)$$

1.4: Vereinfachen Sie folgenden Ausdrücke: a) 20^5 b) 0.2^5 c) $x^{2.5}\cdot x^{-2}$

d) $(K^8\cdot K^4)^{1/2}$ e) $\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ g) $\left(\frac{[a^{1/6}\sqrt[5]{b^4}]^2}{a^{4/3}\sqrt{a^{-5}b^{1/5}}}\right)^{1/3}$

1.5: Lösen Sie die folgende Gleichung und kontrollieren Sie die Lösung(en):

$$x^4-6x^2+8=0$$

Aufgabenblock 1 – Rechnen mit Einheiten

1.6: Winkel werden in Radiant oder in Grad angegeben. Wieviel Radiant entsprechen 101°?

1.7: Pro Minute fliessen durch einen Wasserhahn 10 000 000 μl Wasser. Der Wasserhahn wird während 1 % der Tageszeit benutzt. Wieviel m^3/Jahr sind das?

1.8: Die Masse eines zylindrisch geformten Augentierchens ist durch $M = \pi b r^2 \rho$ gegeben. Hierbei ist die Länge des Augentierchens $b = 800\,\mu\mathrm{m}$ die Dichte des Plasmas $\rho = 1.4\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ und die Masse $M = 0.2\,\mu\mathrm{g}$. Wie groß ist der Radius r des Augentierchens?

Aufgabenblock 2 – Zeichnen von Funktionen und Umkehrfunktion

2.1: Ein Auto fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 10\,\mathrm{m/s}$. Eine Zeitmessung erfolgt mit Lichtschranken. Die Zeitmessung startet bei der ersten Lichtschranke, die sich bei $s = 50\,\mathrm{m}$ befindet. Skizzieren Sie die vom Fahrzeug zurückgelegte Strecke im Zeitintervall [5 s,10 s]. Geben Sie die Beziehung $s(t)$ an.

2.2: Eine Feuerwerksrakete startet mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$ senkrecht nach oben. Die Höhe wird durch $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ beschrieben, wobei $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist. Skizzieren Sie h(t) für $0\,\mathrm{s} < t < 5\,\mathrm{s}$. (Hinweis: Es ist hier nützlich auszurechenen, nach welcher Zeit die Rakete wieder auf dem Boden aufschlägt. Damit können Sie auch den Zeitpunkt erraten, an dem die Gipfelhöhe erreicht wird.)

2.3: Bilden Sie die Umkehrfunktion von $y = x^{\frac{3}{2}}$ und zeichnen Sie beide Funktionen in ein Diagramm im Bereich $0 \leq x \leq 4$.

Aufgabenblock 3 – Logarithmus und Exponentialfunktion

3.1: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

- $\log_a \sqrt{\frac{a}{b}}$
- $\log_a \left(\sqrt[5]{a^4} \sqrt[3]{b} \right)$

3.2: Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf:

$$\log_3(x+3) + \log_3(6) = 2 + \log_3(x-4)$$

3.3: Der Zerfall radioaktiver Atome erfolt gemäß eines Zerfallsgesetzes $N(t) = N_0\, e^{-t/\tau}$. $N(t)$ ist die Anzahl der vorhandenen Atome zum Zeitpunkt t, N_0 die Anzahl zum Zeitpunkt $t = 0$. τ ist die sogenannte Lebensdauer. Alternativ gibt man auch manchmal die sogenannte Halbwertszeit $\tau_{\frac{1}{2}}$ an, das Zeitintervall nach dem nur noch die Hälfte der ursprünglichen Anzahl von Atomen vorhanden ist. In einer Probe seien nach 10^4 s noch 10 % der ursprünglich vorhandenen Atome übrig. Berechnen Sie Lebensdauer und Halbwertszeit des radioaktiven Isotops.

3.4: Sie erhalten auf angelegtes Kapital 5 % Zinsen pro Jahr. Nach wieviel Jahren hat sich Ihr Kapital verdoppelt, wenn Sie die erhaltenen Zinserträge sofort wieder Ihrem Kapital hinzufügen? Betrachten Sie das Problem als "kontinuierlich".

Aufgabenblock 4 – Trigonometrische Funktionen

4.1: Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Rechenregeln:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan(x)$
  (Ahnen Sie, wo das "co" in den Funktionsnamen her kommt?)

4.2: Die Schwingung eines Fadenpendels wird durch $y(t) = A\cos(\omega t)$ beschrieben. Die Amplitude beträgt $A = 10\,\mathrm{cm}$. Die Kreisfrequenz $\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$. Die Schwingung beginnt zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$.

- Skizzieren Sie $y(t)$.
- Zu welchen Zeiten t durchläuft das Pendel die Nulllage $y(t) = 0$?

Lösung 1.1

$$
\begin{aligned}
\frac{5x-5}{2\pi-\omega} &= \omega-\delta && \Big| \cdot (2\pi-\omega) \\
5x-5 &= (\omega-\delta)(2\pi-\omega) && \Big| +5 \\
5x &= (\omega-\delta)(2\pi-\omega)+5 && \Big| \div 5 \\
x &= \frac{1}{5}(\omega-\delta)(2\pi-\omega)+1
\end{aligned}
$$

Lösung 1.2

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta + a}{x} + \frac{x^2(\delta + a)}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{x^5(\delta + a)}{x^6} \\
=&\frac{(\delta + a)x^5 + \cancel{x^5(\delta + a)} + x^5 - \cancel{x^5(\delta + a)}}{x^6} \\
=&\frac{x^5(\delta + a + 1)}{x^6} \\
=&\frac{\delta + a + 1}{x}
\end{aligned}
$$

Lösung 1.3

1.3 Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf:

$$\boxed{m^4 - x^8 = 16(m^2 - x^4)}$$

Muster erkennen: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\Rightarrow \quad a = m^2 \; ; \quad b = x^4$

$\Rightarrow \quad m^4 - x^8 = (m^2 + x^4)(m^2 - x^4)$

$\Leftrightarrow \quad (m^2 + x^4)\cancel{(m^2 - x^4)} = 16\cancel{(m^2 - x^4)} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{(m^2 - x^4)}$

$\Leftrightarrow \quad m^2 + x^4 = 16$

$\Leftrightarrow \quad x^4 = 16 - m^2$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \sqrt[4]{16 - m^2}}$

Lösung 1.4

a) $20^5 = (2 \cdot 10)^5 = 2^5 \cdot 10^5 = 32 \cdot 10^5 = 3.2 \cdot 10^6 = 3\,200\,000$

b) $0.2^5 = (2 \cdot \frac{1}{10})^5 = \frac{32}{100000} = 0.00032$

c) $x^{2.5} \cdot x^{-2} = x^{2.5-2} = x^{0.5} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

d) $(K^8 \cdot K^4)^{\frac{1}{2}} = K^4 \cdot K^2 = K^6$

e) $\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{(2^8)^{\frac{1}{3}}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = (2^{8-2})^{\frac{1}{3}} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

f) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \left((2^6)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$

g) $$\left(\frac{[a^{\frac{1}{6}}\sqrt[5]{b^4}]^2}{a^{4/3}\sqrt{a^{-5}b^{1/5}}}\right)^{1/3} = \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{8}{5}}}{a^{\frac{4}{3}}\, a^{-\frac{5}{2}}\, b^{\frac{1}{10}}}\right)^{1/3} = \left(\frac{b^{\frac{8}{5}}}{a\, a^{-\frac{5}{2}}\, b^{\frac{1}{10}}}\right)^{1/3} = \left(\frac{b^{\frac{16}{10}}}{a^{-\frac{3}{2}}\, b^{\frac{1}{10}}}\right)^{1/3}$$
$$= \left(a^{\frac{3}{2}}\, b^{\frac{15}{10}}\right)^{1/3} = \left(a^{\frac{3}{2}}\, b^{\frac{3}{2}}\right)^{1/3} = a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a\, b}$$

Lösung 1.5

1.5) Lösen Sie die folgende quadrat. Gleichung und kontrollieren Sie die Lösung(en):

$$\boxed{x^4 - 6x^2 + 8 = 0}$$

$x \rightarrow x^2$

$p = -6$

$q = 8$

$$\curvearrowright (x_{1,2})^2 = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8}$$

$$= 3 \pm \sqrt{9-8}$$

$$= 3 \pm \sqrt{1}$$

$$= 3 \pm 1$$

$$\Rightarrow (x_1)^2 = 3+1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

$$(x_2)^2 = 3-1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_2 = \sqrt{2}}$$

Kontrolle x_1:

$$2^4 - 6\cdot 2^2 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0 \quad \checkmark$$

Kontrolle x_2:

$$(\sqrt{2})^4 - 6\cdot(\sqrt{2})^2 + 8 = 2^{4/2} - 6\cdot 2 + 8$$

$$= 2^2 - 12 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0 \quad \checkmark$$

Da wir $x \to x^2$ ersetzt haben, sind auch $-x_1$ und $-x_2$ Lösungen!

Lösung 1.5

1.5) Lösen Sie die folgende quadrat. Gleichung und kontrollieren Sie die Lösung(en):

$$\boxed{x^4 - 6x^2 + 8 = 0}$$

$x \to x^2$

$p = -6$

$q = 8$

$$\Rightarrow (x_{1,2})^2 = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8}$$

$$= 3 \pm \sqrt{9-8}$$

$$= 3 \pm \sqrt{1}$$

$$= 3 \pm 1$$

$$\Rightarrow (x_1)^2 = 3+1 = 4$$

$$\cancel{\Leftrightarrow x} \quad \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 2}$$