# Aufgabenblock 1 – Ableitung als Grenzwertprozeß

**1.1:** Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ hat die Ableitung $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Berechnen Sie die Ableitung im Punkt $x = 4$ und vergleichen Sie den Wert mit einer Sekantensteigung durch die Punkte $x = 2$ und $x = 6$. Danach durch $x = 3$ und $x = 5$! Erkenntnis?

**1.2:** Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen:

- $f(x) = \text{const}$
- $f(x) = a \cdot x + b$

# Aufgabenblock 2 – Ableitungen nach verallgemeinerter Potenzregel

**2.1:** Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2} + 20x^4$$

$$f(x) = x + 3x^2 + 2.997992458$$

**2.2:** Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion bei $x = 0$:
(Hinweis: Ist die Aufgabe überhaupt gut gestellt?)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls} \quad x > 0 \\ x & \text{falls} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

# Aufgabenblock 3 – Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

**3.1:** Berechnen Sie zunächst $f'(x)$ mit der Produktregel. Multiplizieren Sie beide Terme aus und verwenden Sie dann die Summenregel.

$$f(x) = (x^5 + 2x)(x^2 - 1)$$

**3.2:** Zeigen Sie mit Hilfe der Produktregel, dass ein konstanter Faktor beim Differenzieren erhalten bleibt.

$$f(x) = (x^5 + 2x) \cdot c$$

**3.3:** Die Temperatur in °C von Lebensmitteln, die in einen kühlen Lagerraum gestellt werden, wird durch die Funktion $T$ mit $T(t) = 720/(t^2 + 2t + 25)$ für $t > 0$ und $t$ in Stunden (h) modelliert. Wie groß ist die Temperaturänderung in den Lebensmitteln zwischen $t = 0$ und $t \to \infty$? Wie groß ist die momentane Änderungsrate zur Zeit $t = 2\,\mathrm{h}$?

**3.4:** Zur Anwendung der Kettenregel benötigen Sie 2 Funktionen $f$ und $g$, deren Verkettung die Funktion $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x}$ bildet. Was bietet sich hier für $f$ und $g$ an? Bestimmen Sie $h'(x)$ mit der Kettenregel!

# Aufgabenblock 4 – Kurvendiskussion

**4.1:** Maxima Trigonometrischer Funktionen: Während Schwingung eines Pendels wird dessen Auslenkung $y$ durch die Funktion $y(t) = A\cos(\omega t)$ beschrieben. Für welche Zeiten $t$ ist die Auslenkung maximal? Die Amplitude $A$ beträgt $A = 5\,\mathrm{cm}$ und die Kreisfrequenz $\omega = 1\,\mathsf{s}^{-1}$. Die Schwingung beginnt zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$.

**4.2:** Extremwerte einer kubischen Funktion: Untersuchen Sie $f$ auf Extremwerte, d.h. Maximum, Minimum und Wendepunkt.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

# Aufgabenblock 5 – Partielle Ableitung und Fehlerfortpflanzung

**5.1:** Die Auslenkung $y$ einer fortschreitenden ebenen Welle ist gegeben durch $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$, wobei $x$ der Ort, $t$ die Zeit und $A$ die Amplitude sind. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen nach $x$ und $t$!

**5.2:** Es soll die Periode $T$ eines Federpendels durch Messung der Federkonstanten $D$ und Masse $M$ bestimmt werden. Für die Periode $T$ gilt der Zusammenhang

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}}\,.$$

Gemessen wurden $D = 5\,\mathrm{N/m}$ mit einer Genauigkeit $\sigma_D = 1\,\mathrm{N/m}$. Für die Masse ergaben sich $M = 10\,\mathrm{g}$ mit einer Unsicherheit von $\sigma_M = 1\,\mathrm{g}$. Was resultiert daraus für die Periode $T$ und deren Unsicherheit $\sigma_T$?

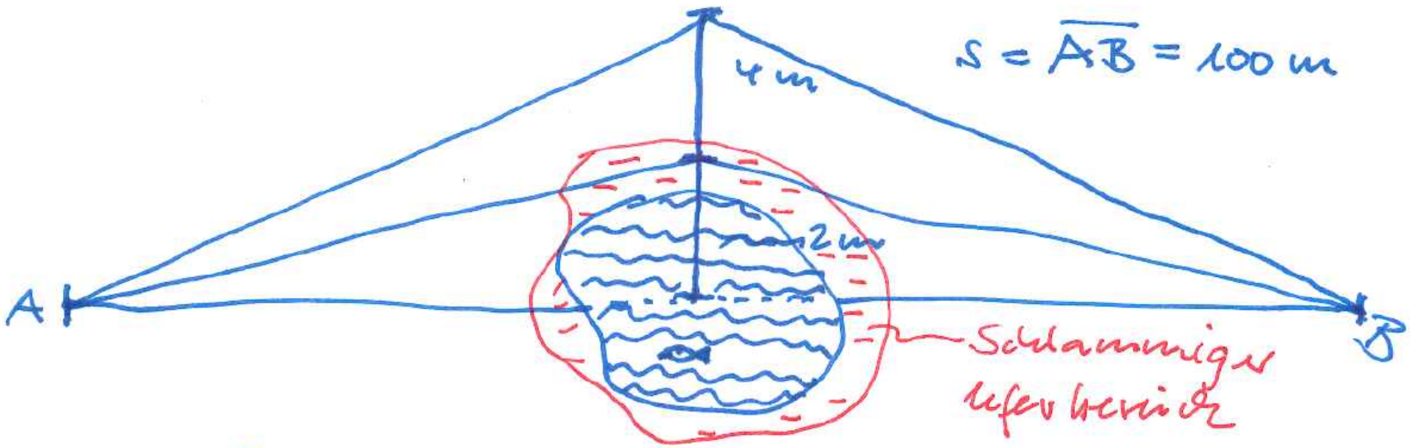
# Aufgabenblock 6 – Taylorentwicklung 1

**6.1:** Entwickeln Sie die Funktion $y = \sin(x)$ um $x_0 = 0$ bis zur fünften Ordnung (d.h. bis zu dem Term, der die fünfte Ableitung enthält).

- Schätzen Sie mit der erhaltenen Entwicklung die Werte für $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ab, und vergleichen Sie die mit den exakten Werten!
- Erklären Sie, warum für kleine Winkel $\alpha$ die Näherung $\sin(\alpha) \approx \alpha$ gilt.

**6.2:** Bestimmen Sie näherungsweise die Lösung der Gleichung $e^{-x} = x$. Entwickeln Sie dazu die $e$-Funktion einmal bis zur ersten, einmal bis zur zweiten Ordnung. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der “exakten” Lösung $x_{\text{exakt}} = 0.567146\ldots$ .

# Aufgabenblock 7 – Taylorentwicklung 2




**7.1:** Sie wollen von Punkt $A$ nach Punkt $B$ gehen (siehe Abbildung). Unglücklicherweise ist der Weg durch einen kleinen Teich blockiert, den Sie umgehen müssen. Als Umweg wählen Sie ein gleichschenkeliges Dreieck mit Höhe $h$. Der Uferbereich des Teiches ist schlammig. Sie fragen sich, ob es sich lohnt, durch diesen Randbereich zu gehen, was $h = 2\,\mathrm{m}$ entspräche, oder ob Sie ihn weiter aber dafür trocken mit $h = 4\,\mathrm{m}$ umgehen. Die Strecke $s = \overline{AB}$ beträgt 100 m.

Finden Sie eine Formel für die Grröße des Umweges und nähern Sie diese Näherung für $h \ll s$. Werten Sie diese dann für die zwei Höhen aus! Schlussfolgerung? Anmerkung: die Aufgabe ist leicht exakt zu lösen, nur ist die sich ergebende Formel nicht unmittelbar zu interpretieren. Zudem ist die Näherungsformel für alle praktischen Belange genügend genau.