Aufgabenblock 1 – Vektoraddition

1.1: Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 600 km/h relativ zur umgebenen Luft in Richtung Norden. Der Wind weht mit einer Geschwindigkeit von 30 m/s aus Richtung Westen. Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs relativ zum Boden nach Betrag und Richtung. Fertigen Sie eine Skizze an.
Hinweis: Hier ist Pythagoras Ihr Freund.

1.2: Skizzieren Sie die Vektorsumme der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wobei $|\vec{a}| = 3\,\mathrm{cm}$ und $|\vec{b}| = 5\,\mathrm{cm}$ und beide Vektoren einen Winkel von $\alpha = 35°$ miteinander bilden. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn sich die Länge (qualitativ)

- beider Vektoren verdoppelt?
- eines Vektors verdoppelt?

1.3: Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $|\vec{d}|$!

Aufgabenblock 2 – Skalarprodukt

2.1: Die Arbeit W entlang eines Weges ist definiert als

$$W := \vec{F} \cdot \vec{s}$$

wobei $\vec{F}$ die Kraft und $\vec{s}$ ein Wegstück sind. Seien

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{m} \quad \text{und} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{N}\,.$$

- Wie groß ist die Komponente von $\vec{F}$ in Richtung $\vec{s}$?
  Hinweis: Die Frage ist motiviert durch die Tatsache, dass physikalisch nur die Kraftkomponente in Wegrichtung Arbeit leistet.
- Wie groß ist die Arbeit W?
- Wie groß ist der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$?

Aufgabenblock 3 – Kreuzprodukt

3.1: Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$!
- Welchen Betrag hat $\vec{c}$?
- Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{c}$!

Aufgabenblock 4 – Vektorableitung entlang Bahnkurve

4.1: Ein Teilchen bewege sich auf einer Bahnkurve, die durch folgende Gleichungen mit der Zeit t als Parameter beschrieben wird:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \\ y(t) &= 2\cos(3t) \\ z(t) &= 2\sin(3t) \end{aligned}$$

(Der Übersichtlichkeit halber lassen wir die Einheiten in dieser Aufgabe weg.)

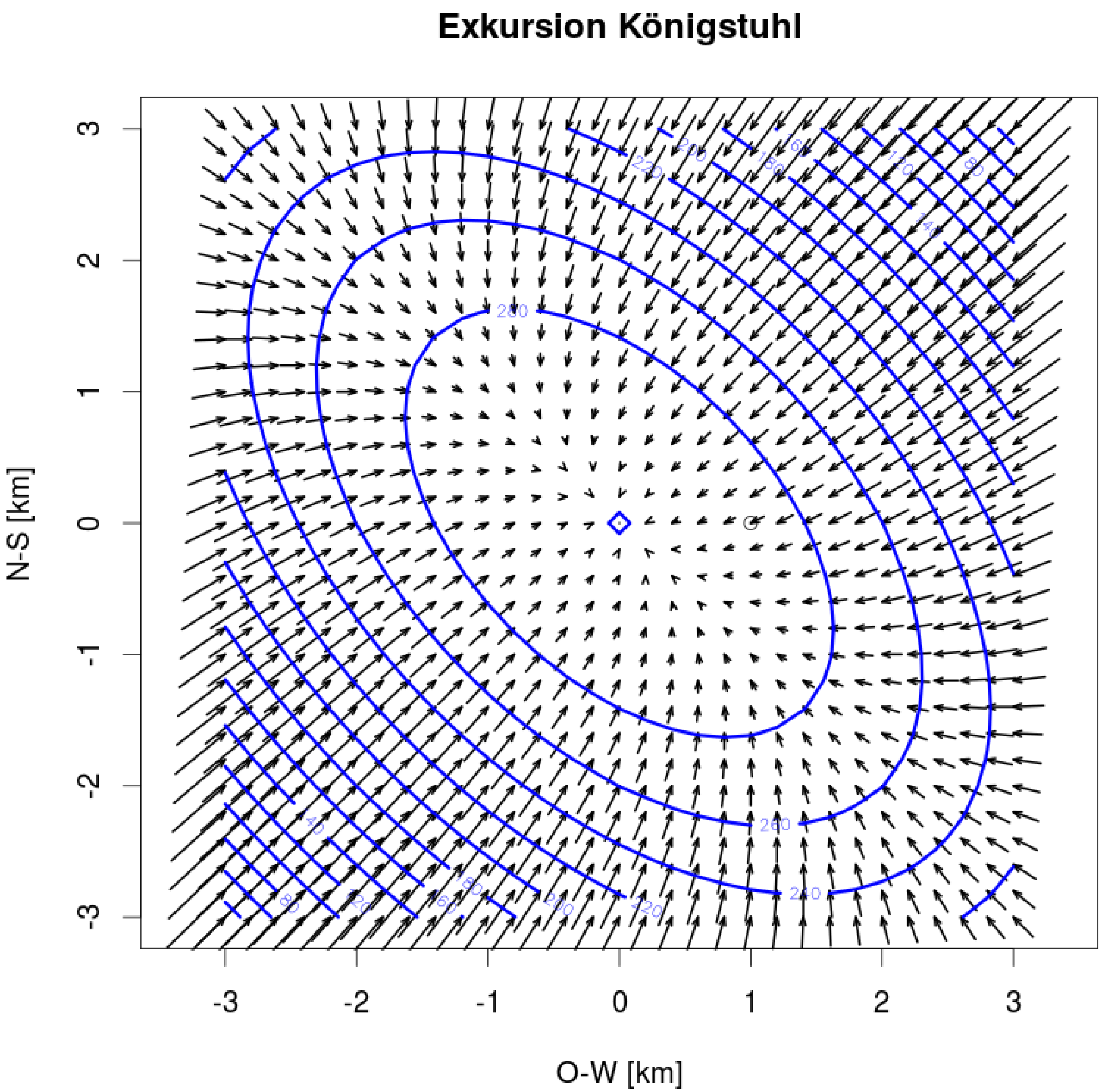
- Berechnen Sie die Funktionen der Geschwindigkeit $\vec{v}$ und Beschleunigung $\vec{a}$ in Abhängigkeit der Zeit!
- Wie groß sind $\vec{v}$ und $\vec{a}$ zum Zeitpunkt $t = 0$?

Aufgabenblock 5 – Gradient eines Skalarfeldes

5.1: Ein zweidimensionales Skalarfeld (Sie können sich hier z.B. ein Höhenprofil dargestellt durch Höhenlinien – Isohypsen – eines Berges vorstellen) sei gegeben als Funktion des Ortes (x, y) gemäß

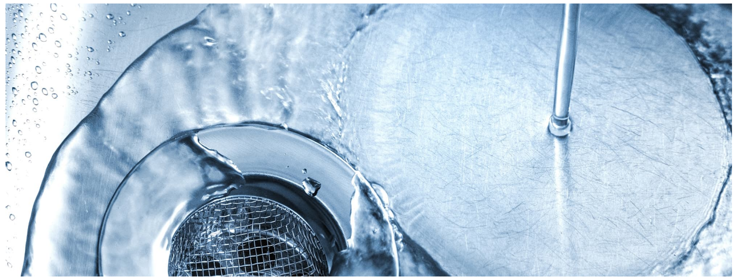
$$h(x, y) = 300 - 10(x^2 + xy + y^2)$$

Berechnen Sie den (2D) Gradienten des Feldes! Überlegen Sie, an welchem Ort das Feld sein Maximum annimmt (bzw. wo der Gipfel des Berges liegt).



Kraft: negativer Gradient, Gradient senkrecht auf Konturlinien

Aufgabenblock 6 – Divergenz eines Vektorfeldes



6.1: In einer Küchenspüle trifft ein feiner Wasserstrahl auf deren Boden. Um den Auftreffpunkt bildet sich nach kurzer Zeit eine stationäre (zeitunabhängige) radialsymmetrische Strömung aus (siehe Abbildungen). Die Dicke der Schicht soll hier nicht betrachtet werden und nur die Bewegung entlang des Bodens berücksichtigt werden. Der Massenstrom $\vec{F}$ des Wassers kann dann durch folgende Gleichung beschrieben werden

$$\vec{F} = \frac{a}{|\vec{r}|^2}\,\vec{r} = \frac{a}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit } a{=}5\,\mathrm{g/s}\,,$$

wobei der Urspung des Koordinatensystems am Auftreffpunkt liegt. So definiert, gibt $|\vec{F}|$ diejenige Menge (Masse) Wasser an, die pro Zeiteinheit (Sekunde) durch einen Querschnitt mit Einheitslänge (je nach Wahl der Einheit z.B. cm) strömt, der senkrecht zu $\vec{F}$ gezogen ist. Da das Strömungsfeld radialsymmetrisch ist, zeigt der Flüssigkeitsstrom überall vom Wasserstrahl weg nach außen.

- Wieviel Gramm Wasser fliessen pro Sekunde im Wasserstrahl?
- Zeigen Sie, dass die Quellstärke (Divergenz) der Strömung überall mit Ausnahme des Ursprungs null ist!
- Warum kann man die Quellstärke am Ursprung mit denen in der Vorlesung gegebenen Methoden nicht berechnen?

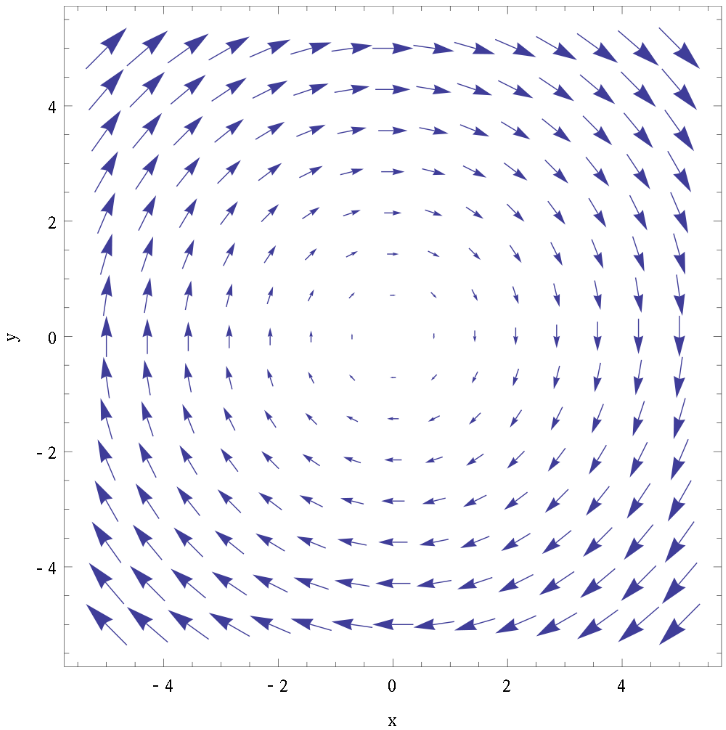
  Hinweis: Beachten Sie, dass für dieses 2D Problem $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_{\mathrm{x}}}{\partial x} + \frac{\partial A_{\mathrm{y}}}{\partial y}$ gilt (d.h. die z-Ableitung fehlt).

Aufgabenblock 7 – Rotation eines Vektorfeldes

7.1: Berechnen Sie die Vektor-Rotation von folgendem zylindersymmetrischen Geschwindigkeitsfeld (unten abgebildet) einer Wasserströmung:

$$\vec{v}(x,y,z) = a\,(y\,\vec{e_{\mathrm{x}}} - x\,\vec{e_{\mathrm{y}}}) = a \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a{=}2/\text{min}\,.$$

Gesetzt den Fall, Sie könnten eine Kugel um einen Punkt frei drehbar in der Strömung verankern: Wo würde sie sich vom Wasser angetrieben am schnellsten drehen? In welche Richtung?



x-y-Querschnitt des Geschwindigkeitsfeldes einer zylindersymmetrischen Strömung
(Quelle: Wikipedia)