Aufgabenblock 7 – Mehrfachintegrale

7.1: Ein Kupferwürfel von $L = 1\,\mathrm{m}$ Kantenlänge wird an einer Ecke (dem Koordinatenursprung) auf eine Temperatur von $0°\mathrm{C}$ gekühlt. Durch den Einfluß der wärmeren Umgebung stellt sich nach einer gewissen Zeit im Kupferwürfel eine Temperaturverteilung

$$T(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{mit } \alpha = 15°\text{C/m}^2$$

ein. Berechnen Sie die mittlere Temperatur des Kupferblockes!

Hinweise: Sie müssen hier ein Dreifachintegral auswerten, das ganz analog einem Zweifachintegral zu berechnen ist. Weiterhin ist es hier günstig, nicht wie in der Vorlesung vorzugehen, sondern die Linearität von Mehrfachintegralen auszunutzen, d.h. $x^2 + y^2 + z^2$ “auseinander zu nehmen”. Sie können das Ergebnis wahrscheinlich schon raten ...

Aufgabenblock 7 – Mehrfachintegrale über Vektoren

7.2: Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes einer ebenen homogenen dünnen dreieckigen Platte! Die Platte wird durch x-Achse, y-Achse und die Gerade $y = b - ax$ mit $a = 1/2$ und $b = 2$ begrenzt.

In der Vorlesung ist zu der Aufgabe schon einiges gesagt worden. Führen Sie die angefangenen Rechnungen nun bis zum Ende durch!

Aufgabenblock 7 – Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

7.3: Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den Gesamtfluß von $\oint \vec{F} d\vec{A}$ durch die Oberfläche eines Würfels von 1 m Kantenlänge, in dessen Zentrum der Ursprung des Koordinatensystems liegt.

Hinweis: die geometrischen Verhältnisse bei diesem Problem machen es schwierig, den Fluß durch die Oberfläche direkt auszurechnen. Es ist viel einfacher, erst die Divergenz von $\vec{F}$ zu berechnen und dann über das Volumen des Würfels zu integrieren – was nach dem Gaußschen Satz dasselbe ergibt.