1 Griechisches Alphabet

Buchstabe klein	Buchstabe groß	Name	Beispiel für physikalische Variable/Konstante
α		Alpha	Feinstrukturkonstante
β		Beta	
γ	Γ	Gamma	Gravitationskonstante, Lorentzfaktor
δ	Δ	Delta	Differenz
ϵ, ε		Epsilon	kleiner Zahlenwert, elektrische Feldkonstante (ϵ_0)
ζ		Zeta	
η		Eta	Wirkungsquerschnitt
θ, ϑ	Θ	Theta	Temperatur, Winkel
ι		Iota	
κ		Kappa	Leitfähigkeit
λ	Λ	Lambda	Wellenlänge
μ		My	magnetische Feldkonstante (μ_0)
ν		Ny	Frequenz
ξ	Ξ	Xi	
o		Omikron	
π, ϖ	Π	Pi	Kreiszahl 3,141 . . ., Produkt
ρ, ϱ		Rho	Dichte
σ	Σ	Sigma	Standardabweichung, Summe
τ		Tau	Zeitkonstante
υ	Υ	Ypsilon	
ϕ	Φ	Phi	Winkel, Fluß
χ		Chi	Adiabatenindex
ψ	Ψ	Psi	Wellenfunktion
ω	Ω	Omega	Winkelgeschwindigkeit, Widerstand

2 Algebraische Rechenregeln

2.1 Rechenregeln für Potenzen

Für alle a, b, r, $s \in \mathbb{R}$:

1. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (hier $b \neq 0$)
3. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
4. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (hier $a \neq 0$)
5. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
6. $0^r = 0$, aber Definition für Spezialfall: $0^0 = 1$

7. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ für $n \in \mathbb{N}$

2.2 Rechenregeln für Logarithmen

Für alle a, b, r, x, $y \in \mathbb{R}$, wobei $a, b \neq 0$:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$
4. $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$
5. $\log_a(1) = 0$
6. $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ (e Eulersche Zahl)

Speziell ergibt sich für den natürlichen (ln) und dekadischen (lg) Logarithmus:

1. $\ln(e) = 1$
2. $\lg(10) = 1$
3. $\lg(x) = \lg(e) \cdot \ln(x) \approx 0{,}434\ldots \cdot \ln(x)$
4. $\ln(x) = \ln(10) \cdot \lg(x) \approx 2{,}30\ldots \cdot \lg(x)$

2.3 Binomische Formeln

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
3. $(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

2.4 Lösung quadratischer Gleichungen

1. $ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
2. $x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Abhängig davon, ob die Diskriminante (Wurzelterm) negativ, null oder positiv ist, erhält man keine, eine oder zwei Lösungen.

2.5 Rechenregeln für $\sin$ und $\cos$

1. $\sin(-x) = -\sin(x)$
2. $\cos(-x) = \cos(x)$
3. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
4. $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
5. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
6. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
7. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
8. $\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$
9. $\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$
10. $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$
11. $\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$

2.5.1 Tabelle einiger Funktionswerte

Winkel ϕ		$\sin(\phi)$	$\cos(\phi)$
$0°$	0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0

3 Differentialrechnung

3.1 Ableitungsregeln

Produktregel	$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
Kettenregel	$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x)$
Quotientenregel	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$

3.2 Tabelle einiger wichtiger Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
const.	0
x	1
x^q	$q\,x^{q-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\ \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x}\ \log_a(e) = \frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

3.3 Kurvendiskussion: Punkt $x = a$ ist ein ...

Maximum	$f'(a) = 0$	$\wedge$	$f''(a) < 0$
Minimum	$f'(a) = 0$	$\wedge$	$f''(a) > 0$
Wendepunkt	$f''(a) = 0$	$\wedge$	$f'''(a) \neq 0$

3.4 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Für die Standardabweichung von y, welches eine Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist, gilt

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\sigma_{x_n}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2},$$

wobei die σ_{x_i} die jeweiligen Standardabweichungen der x_i sind. Die Formel gilt unter der Annahme, dass die σ_{x_i} nicht miteinander korreliert sind.

3.5 Taylorscher Entwicklungssatz

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{1!}f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(\Delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \mathrm{R}_n(\Delta x, x_0)$$

R_n ist das Restglied, für das es verschiedene Formen (Cauchy, Lagrange, etc.) gibt. Häufig wird eine Taylorentwicklung bereits nach dem linearen Term in Δx abgebrochen. Man spricht dann von der "Linearisierung" eines Ausdruckes.

4 Integralrechnung

4.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)\,,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist, d.h. $F'(x) = f(x)$.

4.2 Eigenschaften des Integrals

4.2.1 Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

4.2.2 Linearität

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

4.2.3 Vorziehen einer bezüglich der Integration konstanten Größe

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

4.2.4 Monotonie

Falls $f_1(x) \leq f_2(x)\ \forall x \in [a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

4.2.5 Additivität bezüglich der Integrationsgrenzen

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ + \int_b^c f(x)\,dx$$

4.2.6 Identische Integrationsgrenzen

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

4.3 Integrationsmethoden

4.3.1 Potenzfunktion

$$\int_a^b x^m\,dx = \left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right]_a^b = \frac{1}{m+1}\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)$$

4.3.2 Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b \; - \int_b^b f(x)\, g'(x) dx$$

4.3.3 Integration durch Substitution

Führt man eine neue Integrationsvariable y mit der Eigenschaft $x = g(y)$ ein, ergibt sich

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx = \int_{y_a}^{y_b} g'(y)\, f(g(y))\; dx\,,$$

wobei $y_a = g^{-1}(x_a)$ und $y_b = g^{-1}(x_b)$. Hier bedeutet der Strich die Ableitung nach y.

4.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es gibt mindestens einen Wert $x_0 \in [a, b]$ für den gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0) \cdot (b - a)\,.$$

$f(x_0)$ nennt man den Mittelwert.

5 Vektor analysis

5.1 Rechenregeln für Vektoren

5.1.1 Vektoraddition in kartesischen Komponenten

$$\text{Seien} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_\mathrm{x} \\ b_\mathrm{y} \\ b_\mathrm{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_\mathrm{x} \\ b_\mathrm{y} \\ b_\mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{x} + b_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} + b_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} + b_\mathrm{z} \end{pmatrix}$$

5.1.2 Kommutativgesetz der Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

5.1.3 Assoziativgesetz der Addition

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

5.1.4 Kommutativgesetz der Multiplikation mit einem Skalar

$$m \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot m$$

5.1.5 Assoziativgesetz der Multiplikation mit einem Skalar

$$m(n \cdot \vec{a}) = (nm) \cdot \vec{a}$$

5.1.6 Distributivgesetze der Multiplikation

$$(m + n) \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a}$$

$$m \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$$

5.1.7 Länge (Betrag) eines Vektors

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\mathrm{x}^2 + a_\mathrm{y}^2 + a_\mathrm{z}^2}$$

5.1.8 Skalarprodukt und Kreuzprodukt zweier Vektoren

$$\text{Seien} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_\mathrm{x} \\ b_\mathrm{y} \\ b_\mathrm{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\alpha) = \begin{pmatrix} a_\mathrm{x} \cdot b_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} \cdot b_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} \cdot b_\mathrm{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\alpha) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

α ist der durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel. Der Vektor $\vec{n}$ ist ein Einheitsvektor dessen Richtung sich aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gemäß der Rechten-Hand-Regel bestimmt.