

Nichtgrauer Strahlungstransport  
in numerischen Simulationen  
stellarer Konvektion

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

Vorgelegt von  
**Hans-Günter Ludwig**

Kiel  
1992

Referent: ..... Prof. Dr. H. Holweger .....

Korreferent: .... Prof. Dr. V. Helbig .....

Tag der mündlichen Prüfung: ... 19.02.1992 .....

Zum Druck genehmigt: Kiel, den ... 19.02.1992 .....

gez. Prof. Dr. G. Siedler  
.....

Dekan

## Inhalt

<b>0</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Der Hydrodynamikcode (HD-Code)</b>	<b>8</b>
2.1	Historischer Abriß . . . . .	8
2.2	Allgemeinere Bemerkungen . . . . .	9
2.3	Grundgleichungen und Näherungen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Das Mehrbandverfahren</b>	<b>14</b>
3.1	Grundidee und Vorgehensweise . . . . .	14
3.2	Mittelungsvorschriften . . . . .	17
3.2.1	Das Planck-Mittel . . . . .	17
3.2.2	Das Rosseland-Mittel . . . . .	22
3.2.3	Übergang zwischen Rosseland- und Planck-Mittel, Tie- fenschätzung . . . . .	24
3.3	Sortierverfahren . . . . .	26
3.3.1	$\kappa$ -Sortierung . . . . .	26
3.3.2	$\tau$ -Sortierung . . . . .	28
3.3.3	Zusätzliche Sortierkriterien . . . . .	31
3.4	Eingangsdaten . . . . .	31
3.4.1	Elementhäufigkeiten . . . . .	31
3.4.2	ATLAS6 Opazitäten, ODF-Approximation, Frequenzgitter . .	32
3.4.3	Interpretation von Abbildungen wellenlängenabhängiger Größen	35
3.4.4	ODF-Näherung versus Mehrbandbeschreibung . . . . .	36
3.4.5	ATLAS6 Zustandsgleichung . . . . .	36
3.5	Druck/Temperaturgitter und Interpolation . . . . .	39
3.6	Frequenzverteilung des Strahlungsflusses am unteren Rand . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Wieviele Bänder sind nötig?</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>Anwendung des Mehrbandverfahrens</b>	<b>53</b>
5.1	Spektraltyp G2V (Sonne) . . . . .	53
5.2	Spektraltyp F5V . . . . .	62
5.3	Spektraltyp A0V (Wega) . . . . .	63
5.4	Weißer Zwerg, Spektraltyp DA . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Die Hydrodynamik-Simulationen</b>	<b>76</b>
6.1	Allgemeine Bemerkungen . . . . .	76
6.2	Spektraltyp G2V (Sonne) . . . . .	81
6.2.1	Stationäre Modelle . . . . .	81
6.2.2	Vorstellung der instationären Modelle . . . . .	83
6.2.3	Mittlere Schichtungen der instationären Modelle . . . . .	88
6.2.4	Vergleich zwischen HD- und ATLAS6-Modellen . . . . .	92
6.3	Spektraltyp F5V . . . . .	94
6.3.1	Vorstellung der Modelle . . . . .	94
6.3.2	Mittlere Schichtungen . . . . .	95
6.3.3	Vergleich zwischen HD- und ATLAS6-Modellen . . . . .	100
6.4	Spektraltyp A0V (Wega) . . . . .	103

6.4.1	Vorstellung der Modelle . . . . .	103
6.4.2	Mittlere Schichtungen . . . . .	106
6.4.3	Vergleich zwischen HD- und ATLAS6-Modellen . . . . .	110
6.5	Weißer Zwerg, Spektraltyp DA . . . . .	112
6.5.1	Vorstellung des Modells . . . . .	113
6.5.2	Mittlere Schichtungen und Mischungswegmodelle . . . . .	116
<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>121</b>
	<b>Anhang</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Danksagungen</b>	<b>126</b>

## 0 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Entwicklung und Anwendung eines Verfahrens, das es erlaubt, in hydrodynamischen Simulationen stellarer Gasströmungen die *Frequenzabhängigkeit des Energieaustausches durch Strahlung* näherungsweise miteinzubeziehen. Ein geeignetes approximatives Vorgehen wird in solchen Simulationen nötig, da die für statische Modelle hochentwickelten Verfahren zur Berücksichtigung des Strahlungsaustausches unter Einbeziehung einer großen Zahl von Frequenzpunkten für hydrodynamische Modelle zu aufwendig sind. Das Näherungsverfahren, das hier erarbeitet wird, wird im folgenden als *Mehrbandverfahren* bezeichnet und stellt eine Adaption sowie Verfeinerung bereits existierender Methoden dar. Nach einem kurzen Überblick über den Kieler Hydrodynamikcode, wird das Mehrbandverfahren zunächst allgemein formuliert und dann auf vier exemplarisch ausgewählte Objekte angewendet. Die Diskussion der Resultate, die dabei aus den numerischen Simulationen gewonnen werden, geschieht in zweierlei Hinsicht. Zum einen werden die Unterschiede zwischen einer frequenzgemittelten („grauen“) und frequenzabhängigen („nichtgrauen“) Behandlung des Strahlungstransportes in den hydrodynamischen Simulationen aufgezeigt. Zum anderen wird ein Vergleich von hydrodynamischen mit entsprechenden statisch planparallelen Modellen vorgenommen.

Die komplexe Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten (Kontinuums- und Linienabsorption) wird im Mehrbandverfahren approximiert, indem zunächst Frequenzpunkte mit ähnlichem Absorptionsverhalten zusammengefaßt werden. In jedem der entstehenden Frequenzbänder wird der Absorptionskoeffizient als konstant betrachtet und durch einen geeigneten Mittelwert charakterisiert, wobei sich in großen optischen Tiefen das Rosseland-Mittel, in kleinen das Planck-Mittel als günstig erweist. Ihre Wirkung im Hinblick auf die Energetik des Strahlungsaustausches wird eingehend diskutiert, wobei im Zusammenhang mit dem Planck-Mittel eine statistische Sichtweise des Problems erarbeitet wird. Typischerweise 5 Frequenzbänder erweisen sich als guter Kompromiß zwischen der Genauigkeit in der Wiedergabe des nichtgrauen Strahlungsaustausches und dem numerischen Aufwand bei seiner Berechnung. Als Qualitätsindikator dient dabei erstmals direkt die Güte in der Wiedergabe der Temperaturschichtung einer statisch planparallelen Modellatmosphäre, in der der nichtgraue Strahlungstransport praktisch exakt behandelt werden kann.

Das Mehrbandverfahren wird auf vier Sternatmosphären mit folgenden Spektraltypen angewendet ( $T_{\text{eff}}$  = Effektivtemperatur,  $g$  = Schwerebeschleunigung an der Oberfläche):

- G2V (Sonne),  $T_{\text{eff}} = 5770$  K,  $\lg g = 4.44$
- F5V ,  $T_{\text{eff}} = 6500$  K,  $\lg g = 4.44$
- A0V (Wega),  $T_{\text{eff}} = 9500$  K,  $\lg g = 3.90$
- DA Weißer Zwerg,  $T_{\text{eff}} = 11300$  K,  $\lg g = 8.0$

Für die Hauptreihenobjekte wird jeweils ein graues und nichtgraues Modell konstruiert. In der Atmosphäre des A-Sterns (Wega) erweist es sich als wichtig, den Strahlungstransport im Kontinuum kurz- und langwellig der Balmerkante separat zu modellieren.

Die Interpretation der zeitabhängigen hydrodynamischen Modelle geschieht anhand von Schichtungen, die durch zeitliche und räumlich horizontale Mittelung aus

ihnen abgeleitet werden. Hierbei wird gegenüber der üblichen Mittelung auf der geometrischen Skala eine Mittelung auf der optischen Tiefenskala bevorzugt, was einen direkteren Bezug zur Beobachtung und flußkonstanten statischen Modellen liefert. Erwartungsgemäß zeigen sich in den subphotosphärischen Gebieten keine entscheidenden Unterschiede aufgrund grauen bzw. nichtgrauen Strahlungstransportes. Die Temperaturstruktur der höheren Photosphäre erweist sich demgegenüber als empfindlich: Nichtgrauer Strahlungstransport sorgt für eine engere Kopplung der Temperatur an ihren Strahlungsgleichgewichtswert.

Die nichtgrauen mittleren Schichtungen werden zusätzlich mit entsprechenden statisch planparallelen ATLAS6-Modellatmosphären verglichen, in denen der konvektive Energietransport mit Hilfe der Mischungswegtheorie beschrieben wird. Um einen möglichst differentiellen Vergleich zu gewährleisten, wird in den ATLAS6-Modellen der Strahlungstransport mit gleicher Frequenzauflösung wie in den hydrodynamischen Rechnungen approximiert. In den hydrodynamischen Modellen resultiert die photosphärische Temperaturstruktur aus einer Balance zwischen radiativer Heizung und konvektiver Kühlung. Erstmals ist eine quantitative theoretische Einschätzung der relativen Wichtigkeit dynamischer und radiativer Effekte im Übergangsbereich von den G- über F- zu A-Sternen möglich. Beim Übergang von G- zu A-Sternen verschiebt sich das Gewicht immer stärker zugunsten der Strahlung. In A-Sternen spielen dynamische Effekte für die Temperaturstruktur eine untergeordnete Rolle, während sie in G- und F-Sternen einen starken Einfluß besitzen. Dies gilt insbesondere für die mittlere und obere Photosphäre, die bislang fast ausschließlich als radiativ geschichtet behandelt wurde. Die Relevanz der konventionellen Modelle kühler Sternatmosphären muß daher gerade für diese Schichten angezweifelt werden, in denen nach der Mischungswegtheorie keine Konvektion auftritt.

Auch für die nicht direkt sichtbaren, subphotosphärischen Gebiete werden Vergleiche zwischen den Vorhersagen der Mischungswegtheorie sowie den Ergebnissen der hydrodynamischen Simulationen im Hinblick auf Temperaturstruktur und konvektive Geschwindigkeiten angestellt. Es zeigt sich, daß der superadiabatische Bereich am oberen Rand der Konvektionszonen von der Mischungswegtheorie nur unbefriedigend wiedergegeben werden kann. In diesem Zusammenhang wird auf das Problem der in A-Sternen spektroskopisch nachgewiesenen hohen Mikroturbulenzgeschwindigkeiten eingegangen.

Völliges Neuland wird bei dem Vorstoß mit hydrodynamischen Simulationen in das Gebiet der Weißen Zwerge betreten, wobei sich die Modellierung der konvektiven Atmosphäre eines DA Weißen Zwergs auf Anhieb erstaunlich problemlos gestaltete. Eine mögliche Aufklärung der widersprüchlichen Beobachtungsbefunde für ZZ Ceti-Sterne deutet sich an.

## 1 Einleitung

Der deutsche Astrophysiker Albrecht Unsöld konnte im Jahr 1930 — damals in Hamburg, später in Kiel tätig — nachweisen, daß in der Sonne die Schichten gleich unterhalb der sichtbaren Oberfläche konvektiv instabil sind (UNSÖLD, 1930). Das heißt es finden dort Gasströmungen statt, bei denen heiße Materie aufsteigt und kühle absinkt. Konvektion ist eine häufig auftretende Erscheinung, die auch im irdischen Alltag beobachtet werden kann. So ist etwa das bodennahe Flimmern der Luft an einem heißen Sommertag Ausdruck konvektiver Geschehnisse, bei denen erwärmte Luft aufsteigt und abgekühlte von oben nachströmt.

Nachdem klar war, daß überhaupt konvektive Gasströmungen in Sternen auftreten, bemühte man sich um ein quantitatives Verständnis dieses Phänomens: Wie groß ist der Beitrag der Strömungen zum Energietransport, der in den Sternen von innen nach außen stattfindet? Wie schnell sind sie? Wie sieht das Strömungsmuster aus? Die Beantwortung dieser Fragen erwies sich als hartnäckiges Problem, da die auftretenden Strömungen turbulenter Natur sind. Erst im Jahr 1953 wurden dabei deutliche Fortschritte erzielt. Die Anwendung der Prandtlschen *Mischungswegtheorie* auf die solare Wasserstoffkonvektionszone durch Erika Vitense in Kiel zeigte einen einfachen Weg auf, die Auswirkungen der Konvektion in astrophysikalischen Problemstellungen zu berücksichtigen (VITENSE, 1953). Allerdings hängen die Aussagen der Mischungswegtheorie in gewissem Ausmaß von einem freien Parameter, dem sogenannten Mischungsweg ab. Die Ergebnisse der Theorie besitzen daher, wie Vitense selbst ausdrücklich feststellt, nur „halbquantitativen Charakter“. Nichtsdestoweniger fand und findet die Mischungswegtheorie<sup>1</sup> aufgrund ihrer leichten Handhabung in der Astrophysik weite Anwendung. Im Hinblick auf ihre schlecht fundierten Grundlagen bleibt aber die Frage im Raum stehen: Wie verlässlich ist die Mischungswegtheorie, und wie lassen sich Fortschritte in Richtung auf eine parameterfreie Beschreibung der Konvektion erzielen?

Der englische Mathematiker Alan Turing stellt 1950 fest: „Die spezielle Eigenschaft von Digitalcomputern, daß sie jede andere Maschine mit un stetigen Zuständen nachahmen können, läßt sich auch so beschreiben, daß sie universelle Maschinen sind. Die Existenz von Maschinen mit dieser Eigenschaft hat die wichtige Konsequenz, daß es von *Geschwindigkeitserwägungen* abgesehen unnötig ist, immer neue Maschinen für unterschiedliche Rechenprozesse zu entwickeln.“ Turings mathematische Sichtweise läßt die Entwicklung, daß Computer mit immer höhere Rechengeschwindigkeiten konstruiert werden, als nebensächlich erscheinen. Gerade aber dadurch sind in letzter Zeit erst praktisch gangbare Möglichkeiten einer grundlegenden Beschreibung der Konvektion in Sternen erschlossen worden. Mitte der siebziger Jahre war die Rechenleistung der schnellsten Computer so weit gestiegen, daß eine *numerische Simulation* konvektiver Strömungen in Sternen unter Einschluß der wesentlichen physikalischen Effekte möglich wurde.

Worin liegt der Fortschritt einer numerischen Simulation konvektiver Prozesse gegenüber einer Beschreibung, wie sie die Mischungswegtheorie liefert? Grundsätzlich sind die physikalischen Prinzipien, die die stellaren Gasströmungen beherrschen, bekannt. Sie können im Rahmen einer analytischen Behandlung auch nicht annähernd in voller Allgemeinheit berücksichtigt werden. In numerischen Simulationen kann dies jedoch geschehen, so daß sie die gewünschte parameterfreie Beschreibung der Strömungsvorgänge liefern können.

---

<sup>1</sup>Für eine aktuellere Darstellung der Mischungswegtheorie im astrophysikalischen Kontext siehe Stix (1989).

In den achziger Jahren hat der numerische Ansatz weite Verbreitung gefunden. Während zunächst bevorzugt die Sonne studiert wurde, wurde später das Interesse auch zunehmend auf verwandte Hauptreihensterne ausgedehnt. Damit einher ging eine Fortentwicklung im Grad der Qualität, mit der die physikalischen Effekte programmtechnisch modelliert wurden. Dies betrifft z.B. die räumliche Auflösung, den Strahlungstransport sowie die Beschreibung von Kompressibilität und Viskosität des stellaren Plasmas. Dies sei anhand der folgenden Arbeiten dokumentiert: NORDLUND (1982), NORDLUND und DRAVINS (1990); STEIN ET AL. (1989); SOFIA und CHAN (1984), CHAN und SOFIA (1989); HURLBURT ET AL. (1984, 1986), CATTANEO ET AL. (1991). Einen Überblick über den Stand der hydrodynamischen Arbeiten für die Sonne geben SPRUIT ET AL. (1990).

Begleitet wurden diese theoretischen Fortschritte von Verbesserungen in der Beobachtungstechnik. Hier sei die Einführung von CCD-Detektoren und adaptiven Optiken, sowie Beobachtungen von Satelliten aus genannt. Dies hat nicht nur eine Verfeinerung der solaren Beobachtungsbefunde mit sich gebracht, sondern auch — über den Weg höchstauflösender Spektroskopie — den Nachweis von konvektiven Gasströmungen in hellen Fixsternen ermöglicht (DRAVINS, 1987). Es besteht damit Gelegenheit, numerische Simulationen auch bei anderen Sterntypen mit ihren ganz andersartigen physikalischen Bedingungen auf ihre Realitätsnähe zu testen. Fällt dieser Test positiv aus, so kann man es wagen, die numerischen Simulationen auf das nicht direkt beobachtbare Sterninnere auszudehnen. Dabei wird ein weiteres Feld offener Fragen im Bereich der Theorie des inneren Aufbaus und der Entwicklung der Sterne ins Auge gefaßt werden können.

Die vorliegende Arbeit ordnet sich in ein Projekt am Kieler Institut für Theoretische Physik und Sternwarte ein, in dem die Entwicklung eines leistungsfähigen hydrodynamischen Programmcodes vorangetrieben wird, der auf die numerische Simulation oberflächennaher Gasströmungen in Sternen zugeschnitten ist. Der Code löst numerisch die hydrodynamischen Grundgleichungen eines viskosen geschichteten Mediums gekoppelt mit den Gleichungen des Strahlungstransports. Der bereits implementierte Strahlungstransport berücksichtigt die komplizierte räumliche Struktur des Strömungsmusters. Bisher ist dabei aber seine Frequenzabhängigkeit vernachlässigt und die sogenannte „graue Näherung“ verwendet worden. D.h. die komplexe Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten (siehe z.B. Abb. 17 auf Seite 56) durch einen konstanten Mittelwert approximiert worden. Aus der Theorie des Strahlungstransportes in statischen Medien ist seit langem bekannt, daß dies erheblichen Einfluß auf das Temperaturprofil der Schichtung hat. Es erhebt sich die Frage, wie sich eine Berücksichtigung der Frequenzvariation des Absorptionskoeffizienten in den zeitabhängigen, dynamischen Simulationen auswirkt.

*Ziel der vorliegenden Arbeit* ist die Entwicklung, Implementation und Anwendung eines Verfahrens, das eine nichtgraue Beschreibung des Strahlungstransportes erlaubt. Kernproblem bei seiner Entwicklung ist die Bedingung, daß der extrem unregelmäßige Verlauf des Absorptionskoeffizienten mit der Frequenz durch nur einige wenige Stützstellen wiedergegeben werden muß. Aufgrund der komplizierten räumlichen Struktur der Strömung ist der Strahlungstransport in den Simulationen für jeden einzelnen Frequenzpunkt sehr aufwendig. Der Aufwand wächst linear mit der Zahl der Frequenzpunkte. Damit der gesamte Rechenaufwand in einem Rahmen bleibt, der die praktische Durchführung von Simulationen zuläßt, ist man auf eine Maximalzahl von etwa 6 Frequenzpunkten beschränkt. Das Verfahren, das hier entwickelt worden ist, trägt diesen Zwängen Rechnung. Es fällt unter eine Klasse von Verfahren, die bei MIHALAS und MIHALAS (1984) als „multigroup methods“

eingeordnet sind. Im Anklang daran wird das Verfahren im folgenden als das *Mehrbandverfahren* bezeichnet.

Die oberflächennahen Schichten der Sterne, die sogenannten *Sternatmosphären*, sind seit langem Gegenstand theoretischer Untersuchungen (siehe UNSÖLD, 1968). Motiviert ist dies durch das Beobachtungsmaterial. Das Sternspektrum, d.h. die Frequenzverteilung des vom Stern emittierten Lichts, bildet die Hauptinformationsquelle, die Beobachtungen den irdischen Astronomen liefern. Für eine Entschlüsselung der Information, die in den Spektren enthalten ist, sind physikalische Modelle der lichtemittierenden Bereiche notwendig.

Die Entwicklung dieser Modelle wurde lange durch eine Reihe von Grundannahmen beherrscht: Planparallelität, Stationarität und Strahlungsgleichgewicht, bzw. schematisierte Beschreibungen konvektiven Energietransports mit Hilfe der Mischungswegtheorie. Solche Modelle werden im folgenden als „eindimensionale“ oder „klassische“ Modellatmosphären bezeichnet. Die vereinfachenden Grundannahmen erlauben, den Strahlungstransport in diesen Modellen in enormer Detailtreue zu behandeln. Erst dadurch ist es (zur Zeit) möglich, z.B. Effekte der Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (NLTE) zu berücksichtigen. Hydrodynamische Simulationen von Sternatmosphären geben die klassischen Grundannahmen auf. Dadurch wird auf der einen Seite eine realistischere Beschreibung der räumlichen Strukturen und zeitlichen Abläufe in den Sternatmosphären erreicht. Auf der anderen Seite wird dies (zur Zeit) durch eine Einbuße in der Wiedergabetreue radiativer Prozesse erkauft. In dieser Arbeit werden häufig klassische ATLAS6<sup>2</sup> Modellatmosphären verwendet, um die unterschiedlichen Ergebnisse beider Ansätze zu ergänzen und zu beleuchten.

Das in der Arbeit entwickelte Mehrbandverfahren wird auf vier Sternatmosphären angewendet. Ihre Auswahl geschah weniger mit der Intention, ein bestimmtes Objekt zu modellieren, als vielmehr prototypisch die Effekte nichtgrauen Strahlungstransports in verschiedenen Sternklassen herauszuarbeiten. Wie bereits in der Zusammenfassung angegeben, werden die folgenden Spektraltypen behandelt:

- G2V (Sonne),  $T_{\text{eff}} = 5770 \text{ K}$ ,  $\lg g = 4.44$
- F5V,  $T_{\text{eff}} = 6500 \text{ K}$ ,  $\lg g = 4.44$
- A0V (Wega),  $T_{\text{eff}} = 9500 \text{ K}$ ,  $\lg g = 3.90$
- DA Weißer Zwerg<sup>3</sup>,  $T_{\text{eff}} = 11300 \text{ K}$ ,  $\lg g = 8.0$

Im G- und F-Stern findet man ausgeprägte Konvektionszonen vor. In ihnen wird der Hauptteil des Energiestroms konvektiv transportiert. Für den A-Stern sagt die Mischungswegtheorie eine sehr geringe hydrodynamische Aktivität voraus. Trotzdem ergeben klassische Häufigkeitsanalysen für Wega hohe Mikroturbulenzgeschwindigkeiten (nach GIGAS, 1986,  $\approx 2 \text{ km/s}$ ). Dieser Widerspruch wird im folgenden kurz als das „Mikroturbulenzproblem“ bezeichnet. Dieses Problem lieferte vor einigen Jahren in Kiel die Motivation, neben den Arbeiten an den späteren Spektraltypen auch mit hydrodynamischen Simulationen von A-Sternatmosphären zu beginnen.

---

<sup>2</sup>ATLAS6 ist der Name des Programmcodes, mit dem die Modellatmosphären berechnet werden (siehe Kurucz, 1979).

<sup>3</sup>Weißer Zwerg sind eine spezielle Sternklasse. Ihr Name rührt von ihrer gegenüber Hauptreihensternen geringen Größe und vielfach hohen Oberflächentemperatur her.

## 2 Der Hydrodynamikcode (HD-Code)

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über den Kieler Hydrodynamikcode gegeben werden. Das betrifft vor allem seine physikalischen Grundlagen und soll eine bessere Einschätzung der später präsentierten Simulationsergebnisse ermöglichen. Von Fall zu Fall wird im folgenden auf Literatur verwiesen, in der die verschiedenen angesprochenen Aspekte im Detail beleuchtet werden. Der Hydrodynamikcode wird nachfolgend kürzer auch als HD-Code bezeichnet.

### 2.1 Historischer Abriß

Historisch basiert der Kieler Hydrodynamikcode auf einem Programm von STEFANIK ET AL. (1984). Im Laufe der Jahre ist diese ursprüngliche Programmversion von Dr. M. Steffen und Dr. D. Gigas in vielerlei Hinsicht erweitert und verbessert worden. Von der physikalischen Seite her sind als Erweiterungen stichwortartig die Berücksichtigung des Energieaustausches durch Strahlung, viskoser Effekte und einer realistischen Zustandsgleichung zu nennen. Hinzu trat die Entwicklung physikalisch stimmiger Randbedingungen. Anders als das Wort suggeriert, stellt häufig die Formulierung adäquater Randbedingungen bei der Entwicklung eines hydrodynamischen Codes ein schwieriges Problem dar. Gerade die Konstruktion eines offenen unteren Randes nahm hier einen weiten Raum ein. Von der numerischen Seite sind verbesserte Interpolationsverfahren und die Möglichkeit zu nennen, neben der ursprünglich angenommenen Zylindergeometrie auch kartesische Geometrie des Systems vorgeben zu können.

Im Laufe der Programmentwicklung konzentrierten sich die Simulationsrechnungen naturgemäß zunächst auf die Sonne, da hier die stellare Oberflächenstruktur — die Sonnengranulation — einer räumlich aufgelösten Beobachtung zugänglich ist. Insbesondere die aus den numerischen Rechnungen abgeleiteten photometrischen und spektroskopischen Eigenschaften der Granulation dienten durch den Vergleich mit der Beobachtung als Indikatoren für die Realitätsnähe der Simulation. Die folgenden neueren Arbeiten dokumentieren die erzielten Resultate: STEFFEN (1989), STEFFEN ET AL. (1990), STEFFEN (1991b), STEFFEN und FREYTAG (1991) sowie FREYTAG (1991b).

Nachdem der HD-Code sich im Hinblick auf die Sonne bewährt hatte, schien eine Ausdehnung der Rechnungen auf andere Objekte angezeigt. Man wählte aufgrund des Mikroturbulenzproblems den A0V-Standardstern Wega. Einen Überblick über die bislang gewonnenen Ergebnisse geben die Arbeiten von GIGAS (1988), GIGAS (1989) und GIGAS (1990).

Es könnte der Eindruck entstehen, daß die Arbeiten im Hinblick auf die Sonne und Wega abgeschlossen sind. Dies ist jedoch keineswegs der Fall. Beide Objekte sind nach wie vor Gegenstand intensiver Untersuchungen. Daüberhinaus werden in neuerer Zeit die Rechnungen zu F- und späten A-Sternen ausgedehnt. Ziel dabei ist, ein lückenloses Bild über Änderungen des konvektiven Strömungsverhaltens im Bereich der G- bis A-Sterne zu erhalten. Zusätzlich wird dabei versucht, Aussagen über die konvektive Schallerzeugung abzuleiten. Schallwellen liefern wahrscheinlich einen wichtigen Beitrag zur Aufheizung stellarer Chromosphären, so daß die Kenntnis des mit ihnen verbundenen akustischen Energieflusses in diesem Zusammenhang von Bedeutung ist (siehe STEFFEN ET AL., 1991).

Die vorliegende Arbeit reiht sich in die oben aufgezeigte Entwicklung ein. Die Erweiterung des HD-Codes um die Option, den Strahlungstransport nichtgrau zu beschreiben, trägt zur Verbesserung der Modelle im Bereich der G- bis A-Sterne bei.

Die flexiblere Gestaltung der Opazitätstabellen eröffnete die Möglichkeit, auch für ein so extremes Objekt wie den Weißen Zwerg erste Simulationsrechnungen vorzunehmen zu können.

## 2.2 Allgemeinere Bemerkungen

Konvektion in stellaren Oberflächenschichten, wie sie mit Hilfe des Hydrodynamikcodes modelliert wird, stellt wegen der geringen Reibungskräfte ein Strömungsphänomen bei sehr hoher Reynoldszahl<sup>4</sup> ( $\approx 10^9$ ) dar. Das Strömungsfeld zeigt daher turbulenten Charakter, d.h. es bilden sich kleinskalige ungeordnete Bewegungen bis auf Längen aus, die sehr klein sind gegenüber den typischen Abmessungen des Systems. LANDAU (1981) gibt folgende Abschätzung für die kleinskalige Länge  $\lambda$ , auf der die Strömung ihr ungeordnetes Verhalten verliert, also in diesem Sinne „glatt“ wird:

$$\lambda \approx \frac{l}{\text{Re}^{3/4}}. \quad (2.1)$$

Dabei ist  $l$  die charakteristische Länge im betrachteten System und  $\text{Re}$  dessen Reynoldszahl. Die Strömung wird glatt aufgrund der Energiedissipation durch Reibung, die auf diesen Skalen eine effektive Thermalisierung der kinetischen Energie bewirkt. Man spricht bei der Beschreibung der Turbulenz auch von der „turbulenten Kaskade“: Große Strukturen reichen ihre kinetische Energie an kleinere weiter, bis schließlich auf einer Abmessung, die durch  $\lambda$  gegeben ist, der Prozeß durch Reibung endet.

Wählt man als charakteristische Länge in der solaren Photosphäre die Druckkalenhöhe von  $\approx 150$  km, so erhält man mit  $\text{Re} \approx 10^9$  als Grenzlänge für die kleinskaligen Strömungen  $\lambda \approx 3$  cm. Die hydrodynamischen Gleichungen, die das System beschreiben, entziehen sich weitgehend einer analytischen Behandlung und müssen daher numerisch gelöst werden. Soll die Strömung vollständig auf allen Längenskalen modelliert werden, bräuchte man dazu  $\left(\frac{l}{\lambda}\right)^3 \approx \text{Re}^{9/4} \approx 10^{20}$  Gitterpunkte, was bei weitem die Kapazität von heute verfügbaren Rechnern übersteigt. Man ist daher gezwungen, physikalisch sinnvolle Vereinfachungen zu treffen, die das Problem einer numerischen Behandlung zugänglich machen.

Im Hydrodynamikcode wird eine Ortsabhängigkeit der Strömung in nur zwei räumlichen Dimensionen angenommen. Die Beschränkung auf 2-D Hydrodynamik verringert dabei die Anzahl der benötigten Stützstellen und erweist sich darüber hinaus als hilfreich bei der Interpretation der Ergebnisse, insbesondere bei der Darstellung. Wie schon ausgeführt, ist es nicht möglich, eine Gitterauflösung zu erreichen, mit der die Strömung auf allen Längenskalen modelliert werden kann. Das großräumige Verhalten der turbulenten Strömungen ist aber weitgehend entkoppelt von Vorgängen auf kleinen Längenskalen, bei denen die Viskosität wichtig wird und schließlich Energie durch Reibung dissipiert wird (siehe LANDAU, 1981, CHAN und SOFIA, 1986).

Man kann daher ein Modellsystem betrachten, das gegenüber dem realen System eine deutlich höhere Viskosität besitzt und trotzdem das makroskopische Verhalten realistisch wiedergibt. Dies ermöglicht die numerische Behandlung der hydrodynamischen Gleichungen auf einem relativ groben Gitter. In den Simulationen der Atmosphären der Hauptreihensterne liegt die Gitterauflösung im Bereich von Kilome-

<sup>4</sup>Die Reynoldszahl  $\text{Re}$  mißt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften in einer Strömung. Hohe Reynoldszahlen begünstigen die Ausbildung turbulenter Strömungsformen.

tern. Formal wird die Viskosität durch die Einführung einer sogenannten Sub-Grid-Scale-Viskosität (SGS-Viskosität) erhöht. Sie ist — im Gegensatz zur molekularen Viskosität — keine aus thermodynamischen Zustandsgrößen berechenbare Materialkonstante, sondern ergibt sich aus der lokalen Deformation des Geschwindigkeitsfeldes, um so näherungsweise den Einfluß der kleinskaligen Turbulenz zu erfassen. Die SGS-Viskosität erweist sich auch als wichtig für die numerische Stabilität des Rechenschemas überhaupt.

### 2.3 Grundgleichungen und Näherungen

Die hydrodynamischen Prozesse und der Energietransport durch Strahlung, die sich in den Sternatmosphären abspielen, sollen konsistent und zeitabhängig behandelt werden. Von der physikalischen Seite werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

- keine Magnetfelder; z.B. heißt dies für die Sonne, daß die Granulation in Bereichen der ruhigen Photosphäre modelliert wird.
- Beschränkung auf zwei räumliche Dimensionen: Im HD-Code kann die Strömung in zylindrischen oder kartesischen Koordinaten beschrieben werden. Im Fall der zylindrischen Geometrie erfolgt die Beschränkung durch Annahme einer zur z-Achse des Koordinatensystems (Koordinaten  $r, z, \varphi$ ) rotationssymmetrischen Strömung; zusätzlich soll die  $\varphi$ -Komponente der Geschwindigkeit stets verschwinden. Im Fall der kartesischen Geometrie (Koordinaten  $x, y, z$ ) erfolgt die Beschränkung durch Annahme einer in y-Richtung unveränderlichen Strömung; zusätzlich soll die y-Komponente der Geschwindigkeit stets verschwinden.
- Effekte des rotierenden Bezugssystems (Corioliskraft etc.) bleiben außer Betracht.

Im folgenden soll unter der z-Richtung stets die vertikale Richtung (Richtung des Schwerkraftvektors, Orientierung vom Sterninneren nach außen) verstanden werden. Die Form der Grundgleichungen, wie sie im weiteren angegeben sind, unterscheidet sich für beide Geometrien nicht. Nur die Koordinatenbezeichnung der horizontalen Richtung lautet im Zylinderfall  $r$  und im kartesischen Fall  $x$ . Angegeben werden die Gleichungen für kartesische Koordinaten. Die Gleichungen in zylindrischen Koordinaten ergeben sich einfach durch Ersetzung von  $x$  durch  $r$ .

Was braucht man, um den *Zustand* und die *zeitliche Entwicklung* des Systems zu charakterisieren? Der physikalische Zustand an einem bestimmten Ort ist einerseits durch die Geschwindigkeit, andererseits durch den inneren thermodynamischen Zustand des strömenden Mediums vollständig festgelegt. Die Geschwindigkeit wird durch ihre Horizontalkomponente  $u$  und ihre Vertikalkomponente  $v$  beschrieben. Der thermodynamische Zustand ist durch zwei beliebige intensive Zustandsgrößen festgelegt. In den Grundgleichungen treten die Dichte  $\rho$ , die spezifische Entropie  $s$  (pro Masseneinheit) und der Druck  $p$  auf. Sie sind nach dem gerade Gesagten nicht unabhängig voneinander, sondern über die Zustandsgleichung des stellaren Gases miteinander verknüpft. Es sind also 4 physikalische Parameter als Funktion des Ortes nötig, um den Zustand des Systems zu charakterisieren.

Um die zeitliche Entwicklung zu beschreiben, braucht man Gleichungen, die die zeitlichen Änderungen dieser Größen an jedem Ort liefern. Diese Gleichungen sind gegeben durch die Erhaltungssätze für die Masse (Kontinuitätsgleichung), den Impuls (Bewegungsgleichungen) und für die Energie. Man erhält die grundlegenden Beziehungen:

**Kontinuitätsgleichung:**

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

**Impulsgleichung, x-Richtung:**

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{\text{vis},x} \quad (2.3)$$

**Impulsgleichung, z-Richtung:**

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + f_{\text{vis},z} \quad (2.4)$$

**Energiegleichung:**

$$\frac{ds}{dt} = D_{\text{rad}} + D_{\text{mix}} + D_{\text{vis}} \quad (2.5)$$

Tabelle 1 enthält Angaben über die Bedeutung der Symbole in den Grundgleichungen (2.2) bis (2.5).

Symbol	Bedeutung
$d/dt$	$= \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial z$ , substantielle Ableitung
$t$	Zeit
$x$	horizontale Ortskoordinate
$z$	vertikale Ortskoordinate
$u$	Geschwindigkeitskomponente in horizontaler Richtung
$v$	Geschwindigkeitskomponente in vertikaler Richtung
$\rho$	Massendichte
$\vec{v}$	Geschwindigkeit $\vec{v} = (u, v)$
$g$	Schwerebeschleunigung
$s$	spezifische Entropie (pro Masseneinheit)
$f_{\text{vis},x}$	viskose Kräfte, $x$ -Komponente
$f_{\text{vis},z}$	viskose Kräfte, $z$ -Komponente
$D_{\text{rad}}$	Entropieänderung durch Strahlung
$D_{\text{vis}}$	Entropieänderung durch innere Reibung
$D_{\text{mix}}$	Entropieänderung durch turbulenten Wärmeaustausch

Tabelle 1: Bedeutung der in den Grundgleichungen (2.2) bis (2.5) verwendeten Symbole.

Die Gleichungen (2.2) bis (2.5) beschreiben das Verhalten des stellaren Mediums unter Einschluß kompressibler, viskoser und radiativer Effekte. Im HD-Code wird *nicht* die häufig benutzte anelastische Approximation verwendet.

In den Impulsgleichungen (2.3) und (2.4) treten die viskosen Kräfte  $f_{\text{vis},x}$  und  $f_{\text{vis},z}$  auf. Ihre Berücksichtigung erfolgt unter Beschreibung des Gases als Newtonsche Flüssigkeit, d.h. es wird von einem linearen und homogenen Zusammenhang zwischen den mechanischen Spannungen, die an einem Gaselement angreifen, und den vorhandenen Geschwindigkeitsgradienten ausgegangen. Der Tensor der Reibungsspannungen kann dann als Funktion der Geschwindigkeitsgradienten und der dynamischen Viskosität  $\eta$  ausgedrückt werden. Die viskosen Kräfte ändern nicht nur den

Impuls eines Massenelementes, sondern leisten an ihm auch Reibungsarbeit, die in der Energiegleichung als  $D_{\text{vis}}$ -Term in Erscheinung tritt. Die Energiegleichung (2.5) ist hier in Form einer Beziehung für die Entropiebilanz eines Massenelementes geschrieben.

Wie im vorangegangenen Abschnitt angedeutet, wird im HD-Code als Viskosität, die die Größe der viskosen Terme entscheidend bestimmt, nicht die echte molekulare Viskosität verwendet. An ihre Stelle tritt formal eine „turbulente Viskosität“ oder auch Sub-Grid-Scale-Viskosität, die den Einfluß der vom Gitter unaufgelösten turbulenten Strömungen beschreiben soll. Im Gegensatz zur molekularen Viskosität ist die turbulente Viskosität keine Materialgröße, sondern wird aus der Geometrie des makroskopischen (vom Gitter aufgelösten) Geschwindigkeitsfeldes abgeleitet. Genauer gesagt geht der Deformationstensor des Geschwindigkeitsfeldes und die Gitterauflösung in die Berechnung der turbulenten Viskosität ein. Im Fall statischer Verhältnisse verschwinden alle Komponenten des Deformationstensors und damit auch die turbulente Viskosität. Genauere Angaben zur Berechnung der turbulenten Viskosität finden sich bei LUDWIG ET AL. (1989) und GIGAS (1990). Das im HD-Code implementierte Konzept geht auf Arbeiten von DEARDORFF (1971) zurück.

Ein weiterer Beitrag zur Entropiebilanz, der mit dem kleinskaligen turbulenten Strömungsgeschehen in Verbindung steht, ist der Term  $D_{\text{mix}}$ . Die stochastische Bewegung der unaufgelösten Turbulenzelemente bewirkt analog zur molekularen Wärmeleitung einen Wärmetransport von heißen zu kühlen Gebieten. Die Mischung von Massenelementen unterschiedlicher Entropie führt zu einem Ausgleich benachbarter Entropieunterschiede. Daher wird im HD-Code dieser Wärmestrom proportional zum negativen Entropiegradienten angesetzt (vergleiche auch CHAN und SOFIA, 1986).

Den größten Beitrag zur Energiegleichung liefert der Strahlungsaustausch  $D_{\text{rad}}$ . Bei Annahme von lokalem thermodynamischen Gleichgewicht sowie einer instantanen Einstellung des Strahlungsfeldes auf die Stömung gilt nach KALKOFEN und ULMSCHNEIDER (1977) für den Zusammenhang zwischen Entropieaustausch durch Strahlung und der winkelgemittelten Intensität  $J_\nu$ :

$$D_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{\rho T} \int_0^\infty \kappa_\nu (J_\nu - B_\nu) d\nu. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\kappa_\nu$  der Absorptionskoeffizient (pro Längeneinheit) und  $B_\nu$  die Kirchhoff-Planck-Funktion. Wie man sieht, muß zur Berechnung des radiativen Entropieaustausches das Strahlungsfeld bekannt sein, das sich wiederum aus der Opazitäts- und Temperaturverteilung nach Vorgabe geeigneter Randbedingungen ergibt. Über diesen Term wird das Strahlungsfeld mit den hydrodynamischen Vorgängen gekoppelt.  $J_\nu$  ergibt sich aus der Lösung der Strahlungstransportgleichung. Aufgrund der zweidimensionalen Geometrie des Strömungsfeldes ist ihre Lösung sehr aufwendig. Anschaulich gesprochen diskretisiert man die Gleichung, indem der Transport längs vieler (typischerweise einiger 1000) repräsentativer Lichtstrahlen berechnet wird. Die Strahlen durchlaufen das Simulationsvolumen unter solchen Inklinations- und Azimutwinkeln, daß eine dichte Überdeckung des Volumens erreicht wird. Dieser Ansatz reduziert das mehrdimensionale Strahlungstransportproblem auf die vielfache Behandlung des eindimensionalen Problems. Seine Lösung geschieht in Anlehnung an das klassische Verfahren von Feautrier (vergleiche etwa MIHALAS, 1978).

Im Prinzip müsste die Berechnung der winkelgemittelten Intensität  $J_\nu$  für viele Frequenzpunkte erfolgen, um schließlich das Frequenzintegral in Gleichung (2.6) auszuwerten. Da die Berechnung für jeden Frequenzpunkt sehr aufwendig ist, wurde bisher im HD-Code die graue Näherung für den Transport verwendet. D.h. das Integral

wurde durch einen Frequenzpunkt wiedergegeben. Das in dieser Arbeit vorgestellte *Mehrbandverfahren* verbessert diesen Ansatz, indem die Frequenzabhängigkeit des Integranden in (2.6) in gewissem Umfang berücksichtigt wird. Im nächsten Kapitel wird diese Frage im Detail erörtert. Eine tiefere Beschreibung des Verfahrens, nachdem im HD-Code die Lösung des Strahlungstransportes und die Konstruktion des Strahlensystems geschieht, findet sich wieder bei LUDWIG ET AL. (1989) und GIGAS (1990).

Die thermodynamischen Größen, die in den Grundgleichungen auftreten, sind nicht unabhängig voneinander, sondern über die Zustandsgleichung des stellaren Materials miteinander verknüpft. Bei der Modellierung der Zustandsgleichung wird das Material als Mischung von drei Komponenten aufgefaßt: Wasserstoff, Helium und einem repräsentativen schweren Element. Bei der Berechnung thermodynamischer Größen (Dichte, Entropie, Schallgeschwindigkeit, spezifische Wärme, etc.) wird die Ionisation von H I, He I, He II und die Wasserstoffmolekülbildung berücksichtigt. Details über die Implementation finden sich bei GIGAS, (1990).

Die hydrodynamischen Gleichungen werden mit Hilfe der sogenannten Bicharakteristikenmethode gelöst. Wie der Name nahelegt, wird in diesem Verfahren von den Charakteristiken des partiellen Differentialgleichungssystems Gebrauch gemacht. Es geht zurück auf Arbeiten von BUTLER (1960) und RICHARDSON (1964). Die ursprüngliche Implementation im HD-Code ist beschrieben bei STEFANIK ET AL. (1984).

### 3 Das Mehrbandverfahren

#### 3.1 Grundidee und Vorgehensweise

Das Mehrbandverfahren zur approximativen Beschreibung des nichtgrauen Strahlungsaustausches lehnt sich an ein entsprechendes Verfahren von NORDLUND (1982, 1984, 1990) an. Die Grundidee dabei ist die Frequenzintegration  $\int \kappa_\nu (J_\nu - B_\nu) d\nu$  (siehe Gleichung 2.6), die zur Berechnung des Wärmeaustausches nötig ist, weitgehend vor der Lösung des eigentlichen Transportproblems durchzuführen. Man geht dabei analog wie bei der Formulierung des klassischen grauen Strahlungstransportproblems (vergl. etwa MIHALAS, 1978) vor. Dort wird das nichtgraue Problem auf die *einmalige* Lösung der Transportgleichung für die frequenzintegrierte Intensität reduziert, anstatt sie vielfach für die monochromatischen Intensitäten für alle wesentlichen Frequenzen vorzunehmen. Die Frequenzintegration umfaßt im grauen Fall den *gesamten* relevanten Spektralbereich. Diese Vorgehensweise wird für das Mehrbandverfahren im Prinzip übernommen, man teilt aber nun den Spektralbereich in geeignete Teilbereiche auf, in denen jeweils einzeln das nichtgraue Problem auf das graue reduziert wird.

Ausgangspunkt ist die Strahlungstransportgleichung für die Änderung der Intensität längs eines gedachten Lichtstrahles

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = -\kappa_\nu(s) [I_\nu(s) - B_\nu(s)] \quad \forall \nu. \quad (3.1)$$

Dabei ist  $s$  die geometrische Wegkoordinate längs des Strahles,  $I_\nu$  diejenige monochromatische Intensität, bei der die Photonen sich in positive  $s$ -Richtung bewegen.  $\kappa_\nu$  ist der Absorptionskoeffizient pro Längeneinheit<sup>5</sup>. Der Allquantor soll ausdrücken, daß Gleichung (3.1) für alle Frequenzen  $\nu$  gilt. Da im Rahmen dieser Arbeit stets von der strengen Gültigkeit der LTE-Näherung ausgegangen wird, ist in Gleichung (3.1) statt einer beliebigen Quellfunktion gleich die Kirchhoff-Planck-Funktion  $B_\nu$  geschrieben worden. Noch ein Wort zu dem auftretenden Frequenzindex: Er soll zum einen anzeigen, daß die indizierten Größen frequenzabhängig sind. Zum anderen weist er im Fall der Intensität und der Quellfunktion darauf hin, daß diese Größen pro Frequenzeinheit gemessen werden. Es wäre ohne weiteres möglich, sie auch pro Wellenlängeneinheit oder Ähnlichem anzugeben. Gleichung (3.1) wird nun über die Frequenz integriert. Der Integrationsbereich soll dabei eine Teilmenge  $N_i$  des gesamten Spektralbereiches umfassen.  $N_i$  braucht nicht notwendigerweise einfach zusammenhängend sein. Trotzdem soll im folgenden  $N_i$  als  $i$ -tes Frequenz‘band’ oder etwas treffender als  $i$ -ter Frequenzsatz bezeichnet werden. Der Integrationsbereich soll für jeden Ort auf dem Strahl gleich sein. Damit erhält man aus Gleichung (3.1), wobei der Kürze halber das Wegargument unterdrückt ist,

$$\int_{N_i} \frac{dI_\nu}{ds} d\nu = \frac{d\left(\int_{N_i} I_\nu d\nu\right)}{ds} = - \int_{N_i} \kappa_\nu (I_\nu - B_\nu) d\nu. \quad (3.2)$$

Mit den Definitionen  $I_i \equiv \int_{N_i} I_\nu d\nu$  und  $B_i \equiv \int_{N_i} B_\nu d\nu$  ergibt sich weiter

$$\frac{dI_i}{ds} = - \int_{N_i} \kappa_\nu (I_\nu - B_\nu) d\nu \stackrel{(*)}{=} -\bar{\kappa}_i (I_i - B_i) \quad \forall i. \quad (3.3)$$

<sup>5</sup>Diese Bezeichnungsweise ist üblich. Der Absorptionskoeffizient kann aber auch als ein Wirkungsquerschnitt verstanden werden, den man etwa pro Atom, pro Massen- oder Volumeneinheit messen kann. Der Absorptionskoeffizient pro Längeneinheit wäre in diesem Sinne der Absorptionsquerschnitt pro Volumen. Diese Bezeichnungsweise wäre konsistent mit der ebenfalls gängigen Bezeichnungsweise Absorptionskoeffizient pro Masseneinheit

Obige Beziehung gilt für alle Bänder  $i$ . Die Umformung (\*) in Gleichung (3.3) ist nicht exakt. Ihr liegt die Annahme

$$\kappa_\nu = \text{const} \quad \forall \nu \in N_i \quad (3.4)$$

zugrunde. Umformung (\*) beinhaltet die entscheidende Näherungsannahme im Mehrbandverfahren. Sie reduziert das Strahlungstransportproblem auf die *einmalige* Lösung der Transportgleichung im betrachteten Frequenzband  $i$  für die frequenzintegrierte Intensität  $I_i$ . Denn Gleichung (3.3) für die integrierte Intensität ist derjenigen für die monochromatische Intensität (3.1) völlig analog. Statt (3.1) für eine große Zahl von Frequenzpunkten zu lösen, braucht man (3.3) nur für jedes Band einmal zu behandeln. Für den gesamten radiativen Energieaustausch ist die Frage nach dem detaillierten Verlauf mit der Frequenz ohne Belang, da nur das Integral über den gesamten Spektralbereich eingeht. Insgesamt wird der Aufwand zur Berechnung des nichtgrauen radiativen Energieaustausches drastisch vermindert und erst dadurch eine Berücksichtigung in den hydrodynamischen Simulationen ermöglicht.

Wie wir etwa anhand der Abbildung 9 ersehen können, ist die Annahme (3.4) nicht gut erfüllt. An einem Ort schwankt der Absorptionskoeffizient als Funktion der Frequenz um mehrere Größenordnungen. Trotzdem soll im folgenden davon ausgegangen werden, daß Umformung (\*) zulässig ist. Im Hinblick auf das Mehrbandverfahren besteht die Kunst nun darin, die dadurch auftretenden Fehler zu minimieren. Dabei ist im Auge zu behalten, daß nicht alle Eigenschaften des Strahlungsfeldes von gleicher Wichtigkeit sind, sondern es nach der Energiegleichung 2.5 eben auf die Abweichung vom Strahlungsgleichgewicht ankommt, um die Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld und dem stellaren Plasma korrekt zu beschreiben. Dafür stehen nach Gleichung (3.3) zwei Möglichkeiten offen. Zum einen hat man die Freiheit, den *Frequenzsatz*  $N_i$  beliebig zusammenzustellen, zum anderen kann man eine geeignete *Mittelungsvorschrift* wählen, aus der sich eine für die Wiedergabe der Energetik günstige Opazität  $\bar{\kappa}$  ergibt. Beide Punkte werden in den folgenden Kapiteln eingehend diskutiert.

Obwohl man durch geschickten Gebrauch der obigen ‘Freiheitsgrade’ gewisse Fortschritte erzielen kann, ist es illusorisch zu versuchen, mit einigen wenigen festgelegten Frequenzbändern den Strahlungsaustausch in allen auftretenden stellaren Spektraltypen beschreiben zu wollen. Schon beim Übergang von G- nach A-Hauptreihensternen findet man erhebliche Unterschiede in den Druck- und Temperaturverhältnissen der Atmosphären. Die Annahme (3.4) sollte aber weitestgehend für alle Drücke und Temperaturen, die man in der Atmosphäre antrifft, erfüllt sein. Soll dies für alle möglichen Spektraltypen der Fall sein, bedeutet dies faktisch, daß (3.4) für einen extrem weiten Bereich von Drücken und Temperaturen zu gewährleisten ist, in dem sich Anregungs- und Ionisationszustände der verschiedenen Absorber und damit auch der Absorptionskoeffizient bei einer bestimmten Frequenz drastisch ändern. Eine Vereinfachung der Situation tritt ein, wenn man eine Mehrbandbeschreibung des radiativen Energieaustausches auf die Anwendung in einer speziellen Sternatmosphäre hin zuschneidet. Diese *Beschränkung auf einen Spektraltyp* ist eine wesentliche weitere Annahme, die erst die Konstruktion einer Beschreibung mit wenigen Frequenzsätzen ermöglicht. Für gegebenen Spektraltyp braucht die Annahme (3.4) nur für Drücke und Temperaturen in der Nähe der tatsächlich auftretenden erfüllt sein. Sternatmosphären sind in erster Näherung eindimensionale Schichtungen, in denen Druck und Temperatur nicht unabhängig voneinander variieren. Dies schränkt den relevanten Druck/Temperaturbereich, für den Annahme (3.4) gewährleistet sein muß, stark ein.

Die Betrachtung eines speziellen Spektraltypes bringt noch eine weitere Beschränkung des Druck/Temperaturbereiches mit sich. Wie wir im Abschnitt über die Mittelungsvorschriften sehen werden, kann die Energetik des Strahlungsfeldes in großen optischen Tiefen durch Verwendung des Rosseland-Mittels *unabhängig* von Annahme (3.4) sehr gut wiedergegeben werden. D.h. bei der Zusammenfassung der Frequenzpunkte zu Bändern, was der entscheidende Punkt zur Erfüllung von (3.4) ist, brauchen nur optisch dünne Gebiete mit ungefähr  $\tau_\nu < 3$  berücksichtigt werden. Dem Gewinn durch diesen Ansatz steht der Nachteil gegenüber, daß man genötigt ist, im besten Fall für jeden stellaren Spektraltyp, der mit dem HD-Code modelliert werden soll, eine eigene Mehrbandbeschreibung zu konstruieren, in dem die Frequenzeinteilung geeignet gewählt ist.

Nun einige Worte zu der programmtechnischen Vorgehensweise, eine Mehrbandbeschreibung zu realisieren. Um die Transportgleichung (3.3) lösen zu können, müssen die Opazitäten  $\bar{\kappa}_i$  und die bandintegrierten Quellfunktionen  $B_i$  bekannt sein. Durch Vorgabe dieser Parameter ist eine Mehrbandbeschreibung festgelegt. In Gleichung (3.1) ist der Absorptionskoeffizient  $\kappa$  als Funktion des Ortes und der Frequenz geschrieben. Vom physikalischen Entstehungsmechanismus her ist er jedoch eine Materialgröße  $\kappa(\nu, p, T)$ , die bei gegebener Frequenz durch den thermodynamischen Zustand, der am betrachteten Ort herrscht, festgelegt ist. Im HD-Code wird zur Charakterisierung des thermodynamischen Zustandes der Gasdruck  $p$  und die Temperatur  $T$  benutzt. Sie sind an jedem Ort des Strömungsfeldes bekannt. Die Opazitäten  $\bar{\kappa}_i$  nach Gleichung (3.3) können daher für jedes Band vorweg als Funktion von Gasdruck und Temperatur berechnet und tabelliert werden. Zur Tabellierung wird der Massenabsorptionskoeffizient benutzt, da er weniger stark als der Absorptionskoeffizient pro Längeneinheit variiert. Dies ist vorteilhaft, da die Daten nur an diskreten Druck/Temperaturstützstellen zur Verfügung stehen, zwischen denen geeignet interpoliert werden muß. Der tabellierte Druck/Temperaturbereich wird dabei so gewählt, daß die in den zu untersuchenden Sternatmosphären auftretenden Werte sicher beinhaltet sind.

Das im Hinblick auf den Absorptionskoeffizienten Gesagte trifft ebenfalls auf die Quellfunktion  $B_i$  in Gleichung (3.3) zu. Die Kirchhoff-Planck-Funktion ist eine Materialgröße und kann als Funktion  $B_\nu(\nu, T)$  von Frequenz und Temperatur geschrieben werden. Nach Frequenzintegration ist die bandintegrierte Funktion  $B_i(T)$  nur noch von der Temperatur allein abhängig. Sie wird ebenfalls tabelliert und zwar in der Form

$$b_i(T) \equiv \frac{\int_{N_i} B_\nu d\nu}{\int_0^\infty B_\nu d\nu} = \frac{B_i}{\sigma/\pi T^4}. \quad (3.5)$$

Eine Mehrbandbeschreibung reduziert sich damit auf eine Tabelle, in der für die gewählte Einteilung der Frequenzpunkte die Opazitäten und die Quellfunktionen für jedes Band enthalten sind. Deshalb wird in dieser Arbeit eine Mehrbandbeschreibung auch einfach als *Opazitätstabelle* für einen bestimmten Spektraltyp bezeichnet.

Mehrdimensionaler nichtgrauer Strahlungstransport ist ein komplexes Problem, das im allgemeinen analytisch nur in grober Näherung behandelt werden kann. So ist eine analytische Abschätzung der Genauigkeit, die man mit einer bestimmten Mehrbandbeschreibung des nichtgrauen Strahlungstransportes erzielt, nicht möglich. Es stellt sich die Frage nach einem geeigneten *Testproblem*, an dem das Verfahren erprobt werden und das als Güteindikator dienen kann. Da man bei einer Mehrbandbeschreibung einen bestimmten Spektraltyp modellieren will, liegt es nahe, als Test mit den tabellierten Opazitäten eine entsprechende eindimensionale Modellatmosphäre zu berechnen. Für diese Aufgabe wird eine modifizierte Version des

ATLAS6-Programms von KURUCZ (1979) verwendet, das für die Konstruktion planparalleler statischer flußkonstanter Modellatmosphären ausgelegt ist. Die Ergebnisse, die man mit einer Mehrbandbeschreibung erzielt, können damit direkt mit den Ergebnissen verglichen werden, die man bei Verwendung von detailliertem nichtgrauen Strahlungstransport erhält. Typischerweise werden in ATLAS6 1220 Frequenzpunkte für die Beschreibung des Strahlungstransportes verwendet. Als wichtigstes Güte Merkmal für ein konstruiertes Mehrbandverfahren dient die Übereinstimmung, die die resultierenden Temperaturschichtungen in beiden Fällen zeigen. Abbildung 14 auf Seite 14 ist ein Beispiel: Dargestellt sind eine graue (Kurve 1) und eine nichtgraue Temperaturschichtung (Kurve 2), die unter Zugrundelegung von 1220 Frequenzpunkten berechnet ist. Sie dienen zum Vergleich mit der Mehrbandschichtung (Kurve 3), die eine Mehrbandbeschreibung mit 5 Frequenzsätzen liefert. Alle drei Schichtungen repräsentieren flußkonstante Modelle mit solarer Effektivtemperatur. Man sieht, daß die Mehrbandbeschreibung die Schichtung, die mit hoher Frequenzauflösung gerechnet wurde, in guter Näherung approximiert. Die Temperaturen sind gegen den Druck und nicht gegen die optische Tiefe geplottet, da die optischen Skalen selbst von den verwandten Opazität abhängen. Die Schichtungen werden bei der Vorstellung der Mehrbandbeschreibungen für die in der Arbeit behandelten Spektraltypen noch eingehender diskutiert.

Das beschriebene Verfahren zum Test einer Mehrbandbeschreibung hat den Vorteil, daß es mit vergleichsweise geringem Aufwand — im Hinblick auf die benötigte Rechenzeit — durchgeführt werden kann. Weiterhin ist es ausreichend realistisch, um genügend Aussagekraft zu besitzen; zwar ist das Strahlungstransportproblem in einer planparallelen statischen Atmosphäre gegenüber dem mehrdimensionalen zeitabhängigen in den hydrodynamischen Rechnungen stark vereinfacht, wesentliche Aspekte werden aber trotzdem getroffen: Auch in hydrodynamischen Modellatmosphären findet der Energietransport in der Hauptsache in vertikaler Richtung — d.h. vom Sterninneren nach außen — statt. Ferner sind die höheren photosphärischen Schichten nicht weit vom Strahlungsgleichgewicht entfernt, so daß die „klassischen“ Modellatmosphären eine brauchbare Annäherung darstellen. Dies wird auch durch den Erfolg unterstrichen, den eindimensionale statische Modelle bei der Interpretation des Beobachtungsmaterials hatten und haben.

Im folgenden soll auf die verbliebenen Teilfragen näher eingegangen werden. Das Mehrbandverfahren als Näherungsmethode für die Behandlung des nichtgrauen Strahlungstransportes hat während seiner Entwicklung naturgemäß eine Reihe von Verbesserungen erfahren. Ansätze, die zu Beginn der Untersuchung erfolgversprechend schienen, wurden später verworfen und durch andere ersetzt. Trotzdem werden in den nächsten Abschnitten einige dieser Methoden, die nun als überholt gelten, beschrieben. Dies soll zum einen die Fortschritte in der Leistungsfähigkeit des Verfahrens dokumentieren, zum anderen ist es zum Verständnis älterer Ergebnisse hilfreich.

## 3.2 Mittelungsvorschriften

### 3.2.1 Das Planck-Mittel

In jedem Frequenzband muß ein geeigneter Mittelwert für den Absorptionskoeffizienten gefunden werden. Dieser Mittelwert sollte so beschaffen sein, daß der Energieaustausch zwischen dem Strahlungsfeld und dem stellaren Plasma gemäß

$$\operatorname{div} \vec{F}_{\text{rad}} = 4\pi \int_{\text{Band}} \kappa_{\nu} (J_{\nu} - B_{\nu}) d\nu \quad (3.6)$$

in jedem Band möglichst genau wiedergegeben wird.  $\kappa_\nu$  ist der Absorptionskoeffizient pro Längeneinheit. Durch Einführung eines mittleren Absorptionskoeffizienten  $\bar{\kappa}$  soll erreicht werden, daß

$$\int_{\text{Band}} \kappa_\nu (J_\nu - B_\nu) d\nu = \int_{\text{Band}} \bar{\kappa} (\bar{J}_\nu - B_\nu) d\nu. \quad (3.7)$$

$\bar{J}_\nu$  ist diejenige winkelgemittelte Intensität, die sich aus dem Strahlungstransport bei Verwendung des gemittelten Absorptionskoeffizienten  $\bar{\kappa}$  anstatt des frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  ergibt. Sie hängt noch von der Frequenz  $\nu$  ab, da die Quellfunktion  $B_\nu$  frequenzabhängig ist. Die Quellfunktion wird als gegeben angenommen, so daß sie in beiden Fällen gleich ist und kein dem  $\bar{J}_\nu$  entsprechendes  $\bar{B}_\nu$  eingeführt werden muß. MIHALAS und MIHALAS (1984) folgend, machen wir nun die Annahme

$$\int_{\text{Band}} J_\nu d\nu = \int_{\text{Band}} \bar{J}_\nu d\nu. \quad (3.8)$$

D.h. man geht davon aus, daß der mittlere Absorptionskoeffizient  $\bar{\kappa}$  die frequenzintegrierte mittlere Intensität hinreichend genau wiedergeben kann. Dies führt auf die vereinfachte Bedingungsgleichung

$$\int_{\text{Band}} (\kappa_\nu - \bar{\kappa})(J_\nu - B_\nu) d\nu = 0. \quad (3.9)$$

Zwei Dinge sind in Hinblick auf Beziehung (3.9) zu bemerken. Zum einen stellt sie in großen optischen Tiefen keine Bedingung an den mittleren Absorptionskoeffizienten  $\bar{\kappa}$ , da sich dort das Strahlungsfeld der Hohlraumstrahlung annähert und  $J_\nu = B_\nu$  wird. Gleichung (3.9) ist also automatisch erfüllt. Dies gestattet, in diesen Bereichen weitere Bedingungen an  $\bar{\kappa}$  zu stellen. Zum anderen legt Bedingung (3.9) nahe,  $(J_\nu - B_\nu)$  als Gewichtsfunktion bei der Berechnung des Mittelwertes  $\bar{\kappa}$  zu verwenden, da dann Gleichung (3.9) exakt erfüllt wäre. Dieser Weg ist aber nicht gangbar, da dazu die mittlere Intensität  $J_\nu$  schon bekannt sein müßte, was die vollständige Kenntnis der Lösung des nichtgrauen Strahlungstransportproblems voraussetzt. Weiterhin ist  $(J_\nu - B_\nu)$  eine unzulässige Gewichtsfunktion für eine Mittelungsvorschrift, da sie nicht positiv definit und damit nicht in jedem Fall normierbar ist.

Trotz dieser Vorbehalte kann man für die oberflächennahen Schichten einer Sternatmosphäre einen Näherungsausdruck für  $(J_\nu - B_\nu)$  angeben, der eine zulässige Gewichtsfunktion für eine Mittelungsvorschrift liefert. Betrachtet man den Spezialfall einer planparallelen Sternatmosphäre und entwickelt die Quellfunktion  $B_\nu(\tau_\nu)$  um eine zunächst willkürlich gewählte optische Tiefe  $\tau_\nu^*$  gemäß

$$B_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu^*) + \left. \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_\nu^*} (\tau_\nu - \tau_\nu^*) \quad (3.10)$$

bis zur ersten Ordnung in  $\tau_\nu$ , erhält man für die mittlere Intensität  $J_\nu$  durch Anwendung des  $\Lambda$ -Operators (vergl. etwa MIHALAS, 1970) zu

$$J_\nu(\tau_\nu) = \left[ 1 - \frac{1}{2} E_2(\tau_\nu) \right] B_\nu(\tau_\nu^*) + \left. \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_\nu^*} \left[ \tau_\nu - \tau_\nu^* + \frac{1}{2} \tau_\nu^* E_2(\tau_\nu) + \frac{1}{2} E_3(\tau_\nu) \right]. \quad (3.11)$$

$E_n(x)$  ist die n-te Integraleponentialfunktion an der Stelle  $x$ . Den mittleren Absorptionskoeffizienten  $\bar{\kappa}$  nach Gleichung (3.9) will man an einem festen geometrischen

Ort bestimmen, der etwa durch eine mittlere optische Tiefe  $\bar{\tau}$  charakterisiert ist. Jeder Frequenzpunkt besitzt dort eine im allgemeinen unterschiedliche monochromatische optische Tiefe  $\tau_\nu(\bar{\tau})$ . Es soll der Grenzfall sehr kleiner optischer Tiefe  $\tau_\nu$  und  $\bar{\tau}$  betrachtet werden; dann gilt  $E_2(\tau_\nu) \approx 1$  und  $E_3(\tau_\nu) \approx \frac{1}{2}$ . Ferner ist es günstig, in Gleichung (3.11)  $\tau_\nu^* = \tau_\nu$  zu wählen. Damit erhält man für Gleichung (3.11)

$$J_\nu(\bar{\tau}) - B_\nu(\bar{\tau}) \approx -\frac{1}{2}B_\nu(\bar{\tau}) + \frac{1}{4} \left. \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right|_{\bar{\tau}}. \quad (3.12)$$

Das Argument  $\bar{\tau}$  wird im folgenden der Kürze halber weggelassen. Die Ableitung in Gleichung (3.12) kann man auf die mittlere  $\bar{\tau}$ -Skala umrechnen und anschließend gemäß

$$\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{d\bar{\tau}} = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{d\bar{\tau}} \quad (3.13)$$

mit dem Temperaturgradienten in Beziehung setzen. Damit erhält man für Gleichung (3.12)

$$J_\nu - B_\nu \approx -\frac{1}{2}B_\nu \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu} \frac{d \ln B_\nu}{d \ln T} \frac{d \ln T}{d \bar{\tau}} \right). \quad (3.14)$$

Die größten Beiträge zum Integral in Bedingung (3.9) stammen von Frequenzen, für die  $\kappa_\nu \gg \bar{\kappa}$  ist. Gerade dort ist  $\bar{\kappa}/\kappa_\nu \ll 1$  und der letzte Summand in der Klammer der Gleichung (3.14) — die Störung — klein. Vernachlässigt man ihn ganz, ergibt sich

$$J_\nu - B_\nu \approx -\frac{1}{2}B_\nu, \quad (3.15)$$

was unmittelbar in Bedingung (3.9) eingesetzt werden kann und eine Mittelungsvorschrift für den Absortionskoeffizienten liefert. Man erhält das sogenannte Planck-Mittel  $\bar{\kappa}_P$ , gegeben durch

$$\bar{\kappa}_P = \frac{\int_{\text{Band}} \kappa_\nu B_\nu d\nu}{\int_{\text{Band}} B_\nu d\nu}. \quad (3.16)$$

Es sei hier nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die Frequenzintegrationen in Gleichung (3.16) jeweils über ein betrachtetes Band zu erstrecken sind. Man erhält also für jedes Band ein individuelles Planck-Mittel.

Es stellt sich die Frage, wann das Planck-Mittel ungünstig wird, um die Energiebilanz nach Gleichung (3.9) zu approximieren. Der vernachlässigte Summand in Gleichung (3.14) enthält die Temperaturableitung auf der  $\bar{\tau}$ -Skala. Damit ist klar, daß besonders Frequenzbänder, die Kontinuumsfrequenzpunkte umfassen, anfällig für Abweichungen von der korrekten Wiedergabe der Energiebilanz sind. Im Kontinuum „überblickt“ man besonders hohe Temperaturunterschiede, so daß die Ableitung groß wird. Weiterhin enthält der Summand die Ableitung der Kirchhoff-Planck-Funktion  $B_\nu$  nach der Temperatur. Mit

$$B_\nu = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (3.17)$$

( $h$  Plancksches Wirkungsquantum,  $k$  Boltzmannkonstante,  $c$  Lichtgeschwindigkeit) erhält man

$$\frac{d \ln B_\nu}{d \ln T} = \frac{\frac{h\nu}{kT}}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}. \quad (3.18)$$

Für die betrachteten Sternatmosphären liegt der zur Beschreibung relevante Spektralbereich im Verhältnis zu den herrschenden Temperaturen so, daß  $h\nu/kT > 1$  gilt. Damit kann die Funktion (3.18) gut in Wienscher Näherung

$$\frac{d \ln B_\nu}{d \ln T} \approx \frac{h\nu}{kT} \quad (3.19)$$

approximiert werden. Dies zeigt, daß besonders der kurzwellige Bereich Fehler in der Energiebilanz bei der Verwendung des Planck-Mittels verursachen kann.

Man muß kritisch anmerken, daß die oben skizzierte „klassische“ Begründung des Planck-Mittels gerade in ihrer Anwendung auf Bandmittel nicht besonders stringent ist. Daher soll nun die Frage nach der Qualität der Mittelungsvorschrift (3.16) nochmal mit einer statistischen Betrachtung beleuchtet werden. Löst man Bedingung (3.9) nach  $\bar{\kappa}$  auf, ergibt sich

$$\bar{\kappa} = \frac{\int \kappa_\nu (J_\nu - B_\nu) d\nu}{\int (J_\nu - B_\nu) d\nu} = \frac{\int \kappa_\nu B_\nu (1 - \alpha_\nu) d\nu}{\int B_\nu (1 - \alpha_\nu) d\nu}, \quad (3.20)$$

wobei die Bezeichnung

$$\alpha_\nu \equiv \frac{J_\nu}{B_\nu} \quad (3.21)$$

eingeführt worden ist. Die Integrationen in Gleichung (3.20) sind jeweils über einen Frequenzsatz zu erstrecken. Die Angabe des Frequenzbereiches wird auch in den folgenden Gleichungen des Abschnittes weggelassen. Betrachtet man als Erwartungswert  $E[x]$  einer Größe  $x$  das Planck-Mittel

$$E[x] = \frac{\int x B_\nu d\nu}{\int B_\nu d\nu}, \quad (3.22)$$

läßt sich Gleichung (3.20) schreiben als

$$\bar{\kappa} = \frac{E[\kappa_\nu] - E[\kappa_\nu \alpha_\nu]}{1 - E[\alpha_\nu]}. \quad (3.23)$$

Der Korrelationskoeffizient  $C[x, y]$  zwischen zwei Variablen  $x$  und  $y$  ist allgemein gegeben als

$$C[x, y] = \frac{E[xy] - E[x]E[y]}{\sigma[x]\sigma[y]}. \quad (3.24)$$

$\sigma[x]$  und  $\sigma[y]$  bezeichnen die Standardabweichungen der Variablen  $x$  bzw.  $y$ , wobei die Standardabweichung als

$$\sigma[x] = \sqrt{E[x^2] - (E[x])^2} \quad (3.25)$$

gegeben ist. Damit läßt sich Gleichung (3.23) umschreiben zu

$$\bar{\kappa} = E[\kappa_\nu] + \frac{\sigma[\kappa_\nu]\sigma[\alpha_\nu]}{E[\alpha_\nu] - 1} C[\kappa_\nu, \alpha_\nu] \quad (3.26)$$

oder nach Definition (3.21) und  $E[\kappa_\nu] = \bar{\kappa}_P$  zu

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_P + \frac{\sigma[\kappa_\nu]\sigma\left[\frac{J_\nu}{B_\nu}\right]}{E\left[\frac{J_\nu}{B_\nu}\right] - 1} C\left[\kappa_\nu, \frac{J_\nu}{B_\nu}\right]. \quad (3.27)$$

Gleichung (3.27) ist eine exakte Umschreibung von Bedingung (3.9). Bei ihrer Interpretation ist stets zu bedenken, daß in die Verteilungsfunktion, die zur Berechnung der verschiedenen statistischen Variablen verwendet wird, auch stets die Kirchhoff-Planck-Funktion als Gewichtungsfaktor<sup>6</sup> eingeht. So gilt

$$\mathbb{E}\left[\frac{J_\nu}{B_\nu}\right] = \frac{\int J_\nu d\nu}{\int B_\nu d\nu} = \frac{J}{B}, \quad (3.28)$$

wobei die Bezeichnungen  $J \equiv \int J_\nu d\nu$  und  $B \equiv \int B_\nu d\nu$  eingeführt wurden. Damit erhält man schließlich für Gleichung (3.27)

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_P + \frac{\sigma[\kappa_\nu]\sigma\left[\frac{J_\nu}{B_\nu}\right]}{\frac{J}{B} - 1} C\left[\kappa_\nu, \frac{J_\nu}{B_\nu}\right]. \quad (3.29)$$

Damit das Planck-Mittel eine brauchbare Näherung für eine Opazität  $\bar{\kappa}$  darstellt, die die Energiebilanz nach Beziehung (3.9) wiedergibt, sollte der zweite Summand in Gleichung (3.29) möglichst klein bleiben. Daraus lassen sich qualitativ einige Eigenschaften ablesen, die die Frequenzpunkte, die zu einem Band zusammengefaßt werden, erfüllen sollten:

- Die Variation des Absorptionskoeffizienten im Band sollte möglichst klein sein.
- Die Variation des Verhältnisses  $J_\nu/B_\nu$  sollte möglichst klein sein.
- Der Absorptionskoeffizient und das Verhältnis  $J_\nu/B_\nu$  sollten möglichst unkorreliert sein.
- $J_\nu$  und  $B_\nu$  sind im allgemeinen von gleicher Größenordnung. Damit liegt das Verhältnis  $J/B$  nahe bei eins, und der Nenner in Gleichung (3.29) kann sehr klein werden. Dies sollte möglichst weitgehend verhindert werden, indem man Frequenzpunkte zusammenfaßt, für die systematisch entweder  $J_\nu > B_\nu$  oder  $J_\nu < B_\nu$  gilt. D.h. Frequenzpunkte mit unterschiedlichem Ein/Ausstrahlungsverhalten sollten nicht in einem Band zusammengefaßt werden.

Hierzu noch eine Bemerkung: Die obigen Regeln sind als erste Richtschnur zu verstehen, ob die Verwendung des Planck-Mittels für ein gegebenes Band günstig ist oder wie eine Bändeinteilung der Frequenzpunkte beschaffen sein sollte, um günstige Verhältnisse zu bewirken. Sie sind ja nur aus einer Näherung (wegen Annahme (3.8)) für die Energiebilanz abgeleitet und können kaum eine *quantitative* Aussage über die Qualität der Wiedergabe der tatsächlichen Verhältnisse liefern. Definitiven Aufschluß kann letztlich erst ein Test geben, bei dem der Strahlungstransport mit den gemittelten Absorptionskoeffizienten durchgerechnet und mit den Ergebnissen bei voller Frequenzauflösung verglichen wird.

Wie schon bemerkt, nähert sich in großen optischen Tiefen die Intensität  $J_\nu$  immer mehr der Kirchhoff-Planck-Funktion  $B_\nu$  an. Da dann die Beziehung (3.9) keine Bedingung mehr an  $\bar{\kappa}$  stellt, kann man versuchen, weitere Eigenschaften, die das Strahlungsfeld im Fall voller Frequenzauflösung besitzt, wiederzugeben. Im Hinblick auf die Energetik ist es naheliegend, die korrekte Wiedergabe des in einem Frequenzband strömenden Flusses zu verlangen. Dies gewährleistet in großen optischen

<sup>6</sup>Es sei nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die Kirchhoff-Planck-Funktion nicht die Bedeutung der Verteilungsfunktion selbst hat. Die Verteilungsfunktion ist primär durch die relative Häufigkeit, mit der man eine bestimmte Opazität im Frequenzraum vorfindet, gegeben. Die Verteilungsfunktion geht in eine Berechnung des Erwartungswertes nach Gleichung (3.22) nur implizit ein.

Tiefen die Einstellung des korrekten Temperaturgradienten, sofern dort die Energie vorwiegend durch Strahlung transportiert wird. Diese Forderung führt auf die Rosselandsche Mittelungsvorschrift für den Absorptionskoeffizienten.

### 3.2.2 Das Rosseland-Mittel

Gesucht ist ein mittlerer Absorptionskoeffizient, der die Eigenschaft besitzt, daß man bei seiner Verwendung den richtigen Energiefluß in einem Frequenzband erhält, also

$$\int_{\text{Band}} \vec{F}_{\text{rad},\nu} d\nu = \vec{F}_{\text{rad}}. \quad (3.30)$$

$\vec{F}_{\text{rad},\nu}$  bezeichnet den Fluß, den der Strahlungstransport bei Benutzung des frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  liefert,  $\vec{F}_{\text{rad}}$  den über das betrachtete Frequenzband integrierten Fluß, den die Benutzung des mittleren Absorptionskoeffizienten  $\bar{\kappa}$  liefert. Gleichung (3.30) besagt insbesondere, daß die monochromatischen Flüsse in beiden Fällen nicht an jedem einzelnen Frequenzpunkt übereinstimmen müssen. Offensichtlich ist es notwendig, die radiativen Energieflüsse in Gleichung (3.30) mit den entsprechenden Absorptionskoeffizienten in Beziehung zu setzen, um so eine Beziehung bzw. Mittelungsvorschrift für die Opazität  $\bar{\kappa}$  zu erhalten. Dies ist im allgemeinen nicht möglich, weil in den optisch dünnen Gebieten kein einfacher — d.h. rein lokal gegebener — Zusammenhang zwischen Strahlungsstrom und Absorptionskoeffizient besteht. In optisch dünnen Gebieten wird der Strahlungsstrom durch die räumliche Verteilung der Quellfunktion und des Absorptionskoeffizienten bestimmt, was die Berechnung einer mittleren Opazität, die Gleichung (3.30) erfüllt, unabhängig von der Struktur dieser Verteilung ausschließt. Nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten soll Gleichung (3.30) aber gerade in den optisch dicken Bereichen der Sternatmosphären erfüllt werden. Hier bekommt das Strahlungsfeld lokalen Charakter und die *Diffusionsnäherung* liefert geeignete Näherungsausdrücke für die gesuchten Strahlungsströme. Die Ableitung der Diffusionsnäherung sei hier für den Fall der planparallelen Atmosphäre im LTE kurz referiert.

In einer planparallelen Schicht hängt die monochromatische Intensität  $I_\nu$  nur von der optischen Tiefe  $\tau_\nu$  und der Neigung  $\vartheta$  des Sehstrahles gegen die Vertikale ab. Führt man als Maß für die Neigung den Parameter  $\mu = \cos \vartheta$  ein, erhält man als Strahlungstransportgleichung

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - B_\nu. \quad (3.31)$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung (3.31) besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu, \mu) &= I_\nu(\tau_\nu^0, \mu) \exp\left(-\frac{\tau_\nu^0 - \tau_\nu}{\mu}\right) \\ &+ \int_{\tau_\nu^0}^{\tau_\nu} B_\nu(t) \exp\left(-\frac{t - \tau_\nu}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Gleichung (3.32) wird nach ihrer Bedeutung in astrophysikalischen Problemen auch als formale Lösung der Strahlungstransportgleichung (3.31) bezeichnet. Die Intensität  $I_\nu$  in einer gewissen Tiefe  $\tau_\nu$  ergibt sich also als Summe eines gewichteten Mittels über die Quellfunktion  $B_\nu$  und der gemäß dem optischen Abstand geschwächten Anfangsintensität  $I_\nu(\tau_\nu^0, \mu)$  in der Tiefe<sup>7</sup>  $\tau_\nu^0$  längs des Sehstrahles mit Neigungswinkel  $\mu$ . In großen optischen Tiefen wird das Strahlungsfeld vornehmlich durch

<sup>7</sup>Die Null in der Bezeichnung für die optische Tiefe dient hier nur zur Unterscheidung. Es ist nicht etwa eine Potenz gemeint. Weiter unten treten entsprechende obere Indizes in Ableitungen auf, die dort wieder die gewohnte Bedeutung haben.

die lokalen Eigenschaften des stellaren Plasmas bestimmt und man kann erwarten, daß der tiefenabhängige Verlauf der Quellfunktion gut durch eine Taylorentwicklung der Form

$$B_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - \tau_\nu)^n}{n!} \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n} \quad (3.33)$$

approximiert werden kann. Setzt man sie in die formale Lösung (3.32) ein und betrachtet den Grenzfall großer optischer Tiefen, erhält man für die Intensität

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = B_\nu + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \mu^2 \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots \quad (3.34)$$

Bemerkenswerterweise hängt die Intensität  $I_\nu$  für gegebenes  $\mu$  nur noch von der Quellfunktion und ihren Ableitungen in der Tiefe  $\tau_\nu$  ab. Die optische Tiefe selbst geht nicht mehr ein! Aus Gleichung (3.34) erhält man durch Integration für das nullte, erste und zweite Eddingtonsche Winkelmoment der Intensität

$$J_\nu(\tau_\nu) = B_\nu + \frac{1}{3} \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots, \quad (3.35)$$

$$H_\nu(\tau_\nu) = \frac{F_{\text{rad},\nu}}{4\pi} = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \frac{1}{5} \frac{d^3 B_\nu}{d\tau_\nu^3} + \dots \quad (3.36)$$

sowie

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{3} B_\nu + \frac{1}{5} \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots \quad (3.37)$$

(Siehe MIHALAS, 1970) Man kann zeigen, daß in großer optischer Tiefe die Reihenglieder mit zunehmender Ordnung rasch kleiner werden und es daher genügt, nur die erste nichtverschwindende Ordnung zu betrachten. Aus Gleichung (3.36) erhält man dann für den radiativen Fluß den handlichen Ausdruck

$$F_{\text{rad},\nu} = \frac{4\pi}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (3.38)$$

Dieser Ausdruck erklärt die Bezeichnung Diffusionsnäherung für diese Approximation. Der Strahlungsstrom in großer optischer Tiefe ergibt sich aus dem Gradienten der Kirchhoff-Planck-Funktion, ähnlich wie bei molekularer Diffusion der Teilchenstrom aus dem Konzentrationsgradienten folgt. Rechnet man die Ableitung in Gleichung (3.38) gemäß  $d\tau_\nu = -\kappa_\nu dz$  auf die geometrische Tiefenskala um, ergibt sich

$$F_{\text{rad},\nu} = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dz}. \quad (3.39)$$

Beziehung (3.39) wurde hier für den planparallelen Fall geschrieben, gilt aber auch allgemein für beliebige Feldverteilungen von Quellfunktion und Absorptionskoeffizient (UNNO und SPIEGEL, 1966) in der Form

$$\vec{F}_{\text{rad}} = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu} \text{grad} B_\nu. \quad (3.40)$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (3.40) läßt sich nun Bedingung (3.30) umschreiben zu

$$\int_{\text{Band}} \frac{1}{\kappa_\nu} \text{grad} B_\nu \, d\nu = \int_{\text{Band}} \frac{1}{\bar{\kappa}} \text{grad} B_\nu \, d\nu. \quad (3.41)$$

Den Gradienten der Quellfunktion kann man nach

$$\text{grad}B_\nu = \frac{dB_\nu}{dT} \text{grad}T \quad (3.42)$$

mit dem Temperaturgradienten, der frequenzunabhängig ist, in Beziehung setzen und kann damit aus (3.41) die skalare Gleichung

$$\int_{\text{Band}} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu = \int_{\text{Band}} \frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \quad (3.43)$$

ableiten. Auflösen nach  $1/\bar{\kappa}$  ergibt die Rosselandsche Mittelungsvorschrift für den Absorptionskoeffizienten

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} = \frac{\int_{\text{Band}} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_{\text{Band}} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}. \quad (3.44)$$

Das Rosseland-Mittel ist ein harmonischer Mittelwert des Absorptionskoeffizienten, gewichtet mit der Temperaturableitung der Kirchhoff-Planck-Funktion. Die harmonische Mittelung betont besonders Frequenzen, an denen der Absorptionskoeffizient klein ist und ein hoher radiativer Fluß erwartet werden kann, was für eine Wiedergabe des korrekten Gesamtflusses günstig ist. Das Rosseland-Mittel nach Gleichung (3.44) ist — wie das Planck-Mittel — eine Materialgröße, die nur vom Druck und der Temperatur des stellaren Plasmas abhängt. Es ist daher möglich, das Rosseland-Mittel, wenn die Einteilung der Frequenzpunkte auf verschiedene Bänder festliegt, unabhängig von der Struktur des gestellten Strahlungstransportproblems vorweg zu berechnen.

### 3.2.3 Übergang zwischen Rosseland- und Planck-Mittel, Tiefenschätzung

Wie wir in den beiden vorangehenden Abschnitten gesehen haben, sind sowohl das Planck- wie das Rosseland-Mittel Materialgrößen, die nur Funktionen von Druck und Temperatur sind und nicht von der Struktur der betrachteten Modellatmosphäre abhängen. In einem Band sind beide Mittel für gegebenen Druck und Temperatur definiert. Für die Lösung der Strahlungstransportgleichung (3.1) bzw. (3.3) ist der Absorptionskoeffizient an jedem Ort *eindeutig* vorzugeben. In großen optischen Tiefen ist das Rosseland-Mittel zu bevorzugen, in geringen das Planck-Mittel. Beide Mittelwerte liegen als Funktionen von Druck und Temperatur vor, wobei keine Information darüber vorliegt, ob diese thermodynamischen Parameter in optisch dünnen oder dicken Gebieten angenommen werden. Um eine Wahl zwischen den beiden Mitteln treffen zu können, ist man auf weitere Informationen angewiesen, die die räumliche Druck/Temperaturstruktur der Atmosphäre betreffen. Hier ist es wieder von entscheidender Bedeutung, daß eine Mehrbandbeschreibung für einen vorgegebenen Spektraltyp zu konstruieren ist. Die Kenntnis der Schwerebeschleunigung ermöglicht eine Abschätzung darüber, welche optische Tiefe mit einem bestimmten Druck/Temperaturwert assoziiert ist.

Zur Ableitung einer solchen Beziehung geht man von der Annahme aus, daß die Atmosphäre hydrostatisch geschichtet ist; es soll die hydrostatische Gleichung

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3.45)$$

gelten.  $p$  ist der Gasdruck,  $\rho$  die Dichte und  $g$  die Schwerebeschleunigung. Die Richtung der  $z$ -Skala ist entgegen der Richtung des Schwerkraftvektors gewählt. Integration der Gleichung (3.45) liefert für den Gasdruck in einer geometrischen Tiefe  $z$

$$p(z) = p(z_0) - g \int_{z_0}^z \rho dz . \quad (3.46)$$

Bezeichnet man mit  $\kappa^m$  den Absorptionskoeffizient pro Masseneinheit, so gilt definitionsgemäß für die optische Tiefe  $\tau$  in der geometrischen Tiefe  $z$

$$\tau(z) = \tau(z_0) - \int_{z_0}^z \kappa^m \rho dz . \quad (3.47)$$

Nimmt man an, daß der Absorptionskoeffizient pro Masseneinheit  $\kappa^m$  nicht stark zwischen den Tiefen  $z_0$  und  $z$  variiert, ergibt sich näherungsweise

$$\tau(z) \approx \tau(z_0) - \kappa^m \int_{z_0}^z \rho dz . \quad (3.48)$$

Damit kann das Dichteintegral aus Gleichung (3.46) eliminiert werden, und man erhält die Beziehung

$$\frac{p(z) - p(z_0)}{g} \approx \frac{\tau(z) - \tau(z_0)}{\kappa^m} . \quad (3.49)$$

Startet man weit außerhalb der Atmosphäre, so daß  $p(z_0) = 0$  und  $\tau(z_0) = 0$ , resultiert schließlich die Abschätzung

$$\tau \approx \frac{\kappa^m p}{g} . \quad (3.50)$$

Wie aus der Herleitung von (3.50) ersichtlich, ist für ihre Genauigkeit ausschlaggebend, wie stark der Absorptionskoeffizient pro Masseneinheit zwischen  $\tau = 0$  und der betrachteten Tiefe  $\tau$  variiert. Auf jeden Fall ist zu erwarten, daß eine gute Korrelation zwischen den Größen auf beiden Seiten der Gleichung für die Tiefenschätzung (3.50) besteht.

Nach Beziehung (3.50) wird die Entscheidung getroffen, ob für die Opazität bei einem bestimmten Druck/Temperaturwert das Rosseland- oder Planck-Mittel benutzt wird. In der Opazitätstabelle für einen Spektraltyp werden nicht für jedes Band  $i$  Planck- und Rosseland-Opazitäten getrennt tabelliert sondern ein nach Gleichung

$$\bar{\kappa}_i = 2^{-\frac{\tau_i}{\tau_{\frac{1}{2}}}} \bar{\kappa}_{P,i} + \left( 1 - 2^{-\frac{\tau_i}{\tau_{\frac{1}{2}}}} \right) \bar{\kappa}_{R,i} \quad (3.51)$$

gewichtetes Mittel.  $\tau_i$  ist diejenige optische Rosselandtiefe, die man aus Gleichung (3.50) erhält, wenn man die bekannte Rosselandsche Opazität pro Masseneinheit für den betrachteten Druck/Temperaturwert im Band  $i$  einsetzt. Vorschrift (3.51) garantiert abhängig vom Parameter  $\tau_{\frac{1}{2}}$  ein schnelles Umschalten vom Rosseland- auf das Planck-Mittel mit abnehmender optischer Tiefe  $\tau_i$ . Die Bezeichnungswiese für die Umschalttiefe  $\tau_{\frac{1}{2}}$  rührt daher, daß die Anteile der beiden Mittel an der resultierenden Opazität für  $\tau_i = \tau_{\frac{1}{2}}$  gerade gleich werden. Die Umschalttiefe  $\tau_{\frac{1}{2}}$  könnte für jedes Band im Prinzip verschieden gewählt werden. Es ist aber nach dem Gesagten klar, daß diese Tiefe in der Nähe von eins liegen sollte. Daher wird in der jetzigen Ausbaustufe des Mehrbandverfahrens ein für jedes Band einheitlicher Wert von standardmäßig  $\tau_{\frac{1}{2}} = 0.35$  verwendet. Diese sozusagen „hybriden“ Opazitätstabellen, in denen ein gewichtetes Mittel aus Rosseland- und Planck-Opazität gespeichert ist, werden in der aktuellen Version des Mehrbandverfahrens benutzt. Frühere Versuche mit rein Rosselandschen Tabellen zeigten bereits gute Erfolge, was die

resultierende Temperaturstruktur betrifft. Rein Plancksche Tabellen mit drei oder weniger Bändern scheitern erwartungsgemäß an der Wiedergabe der Temperaturen in den subphotosphärischen Schichten.

Zum Abschluß des Kapitels über Mittelungsverfahren sei noch auf eine aufschlußreiche Diskussion zu diesem Thema von CARBON (1974) hingewiesen. Carbon untersucht in der Arbeit verschiedene Vorschriften für die Berechnung mittlerer Opazitäten im Hinblick auf ihre Verwendbarkeit bei der Modellierung des molekularen Line-Blanketings.

### 3.3 Sortierverfahren

#### 3.3.1 $\kappa$ -Sortierung

Die  $\kappa$ -Sortierung ist das historisch ältere Verfahren, mit dem anfänglich die Zusammenfassung der einzelnen Frequenzpunkte zu Bändern vorgenommen wurde. Betrachtet man die Bedingungsgleichung (3.4) liegt es nahe, die Größe des Absorptionskoeffizienten zur Sortierung der Frequenzpunkte in die jeweiligen Bänder heranzuziehen. Daher rührt die Bezeichnung  $\kappa$ -Sortierung.

Bei der  $\kappa$ -Sortierung wählt man zunächst einen geeigneten Druck/Temperaturwert aus. Der Frequenzverlauf des Absorptionskoeffizienten für diesen thermodynamischen Zustand dient dann zur Sortierung der Frequenzpunkte in die verschiedenen Frequenzsätze. Die Abb. 1 soll die Vorgehensweise schematisch veranschaulichen: Einem Frequenzsatz werden Frequenzpunkte zugeordnet, an denen der Absorptionskoeffizient von gleicher Größenordnung ist. In Abb. 1 ist ein Beispiel dargestellt, bei dem eine Mehrbandbeschreibung mit vier Bändern konstruiert werden soll. Durch — im Prinzip willkürliche — Vorgabe von drei Schwellenwerten<sup>8</sup>  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  und  $\kappa_3$  für den Absorptionskoeffizienten werden vier Intervalle abgegrenzt, die die Bandzugehörigkeit bestimmen. Wie auch aus der Abbildung ersichtlich, wird eine Frequenz  $\nu$  dem Frequenzsatz  $i$  zugeordnet, falls

$$\kappa_{i-1} \leq \kappa_\nu < \kappa_i \quad (3.52)$$

gilt. Der so einmal festgelegte Zusammenhang zwischen Frequenz und Bandzugehörigkeit wird dann verwendet, um für *alle* Drücke und Temperaturen gemäß der verwendeten Mittelungsvorschrift die Opazitäten  $\bar{\kappa}_i$  in jedem Band zu berechnen.

Es bleibt die Frage zu klären, nach welchen Kriterien die Schwellenwerte und der Druck/Temperaturwert, an dem der  $\kappa_\nu$ -Verlauf betrachtet werden soll, auszuwählen sind. Der Spektraltyp, für den die Mehrbandbeschreibung konstruiert werden soll, ist vorgegeben, d.h. Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung der Sternatmosphäre, die modelliert werden soll, sind bekannt. Für diese stellaren Parameter und unter Annahme gegebener Elementhäufigkeiten wird mit Hilfe des ATLAS6-Programms eine planparallele Modellatmosphäre berechnet. In dieser Referenzatmosphäre wählt man nun eine Tiefe aus und liest dort den herrschenden Druck sowie die herrschende Temperatur ab, die dann für das Sortierungsschema im weiteren verwendet werden. Diese Referenztiefe sollte in der Nähe einer optischen Tiefe im Kontinuum von  $\tau_{\text{cont}} \approx 1$  liegen. Wie man anhand der Eddington-Barbier-Näherung

$$I_\nu(\tau_\nu = 0) \approx B_\nu(\tau_\nu = 1) \quad (3.53)$$

erkennt, entspringt die monochromatische Intensität  $I_\nu$ , die man an der Sternoberfläche beobachtet, ungefähr bei einer monochromatischen Tiefe von eins. Für

<sup>8</sup>Die Indizes 1, 2, und 3 an den Absorptionskoeffizienten dienen hier nur zur Unterscheidung. Sie sollen nicht auf bestimmte Frequenzen hinweisen.

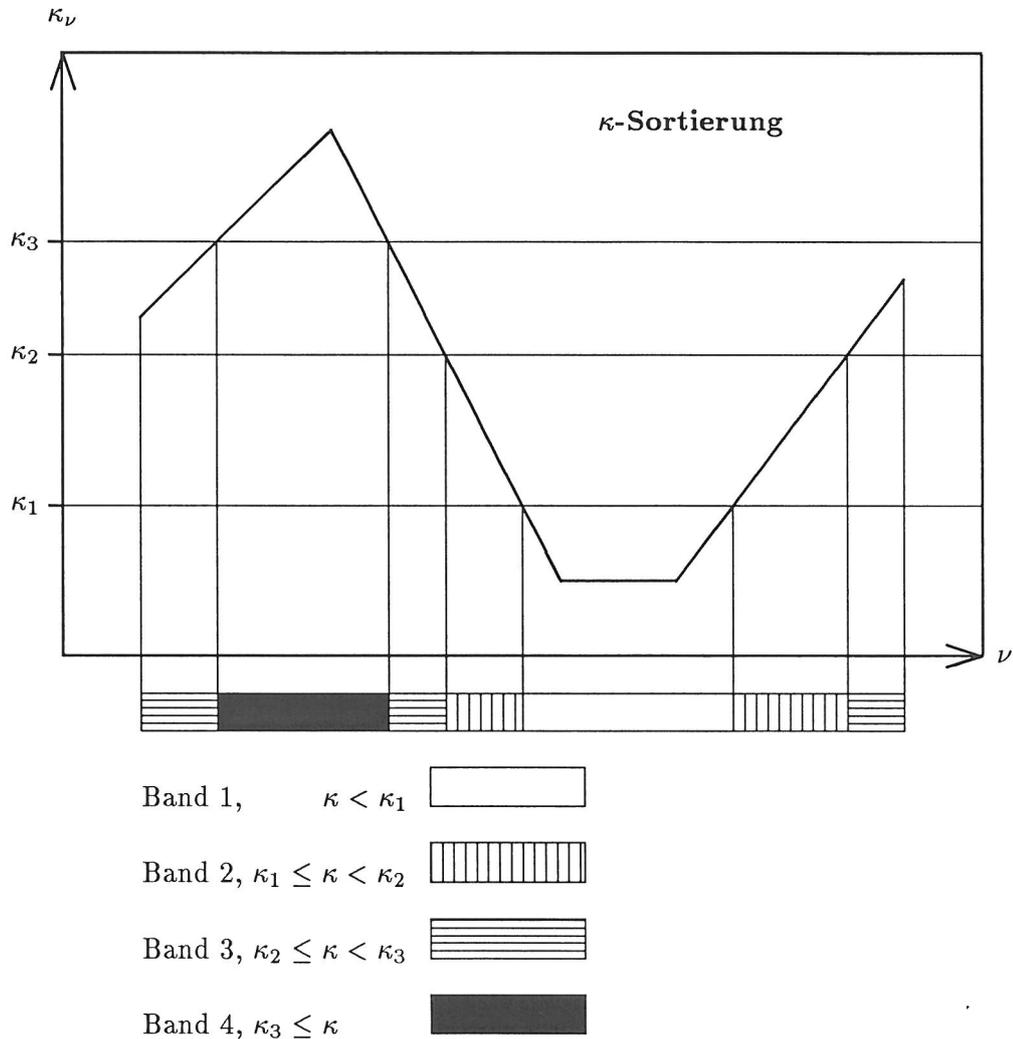


Abb. 1: Vergehensweise bei der  $\kappa$ -Sortierung (schematisch): Dargestellt ist der Verlauf des monochromatischen Absorptionskoeffizienten als Funktion der Frequenz für einen geeignet gewählten Druck/Temperaturwert. Die Sortierung geschieht gemäß des Betrages des Absorptionskoeffizienten.  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  und  $\kappa_3$  definieren Größenintervalle für den Absorptionskoeffizienten. Jedes Größenintervall entspricht einem Band. Eine Frequenz  $\nu$  wird einem Band  $i$  zugeordnet, falls  $\kappa_{i-1} \leq \kappa_\nu < \kappa_i$  gilt. Segmente an der Frequenzachse mit gleicher Schraffur werden demselben Band zugeordnet. Man beachte, daß z.B. das Band, das durch horizontale Schraffur markiert ist, nicht einfach zusammenhängend ist.

Kontinuumsphotonen wird bei  $\tau_{\text{cont}} \approx 1$  das stellare Plasma zum erstenmal transparent, und die einsetzende starke Abstrahlung bewirkt eine drastische Abkühlung des stellaren Plasmas. Dieser Tiefenbereich ist für die globale Temperaturschichtung von entscheidender Bedeutung, da hier der Anschluß des photosphärischen Temperaturverlaufs an die tiefer gelegenen Gebiete geschieht. Von daher sollte hier der Verlauf des Absorptionskoeffizienten möglichst realistisch erfaßt werden.

In bezug auf die Wahl der Schwellenwerte ist man gezwungen, den hohen Dynamikbereich in der Opazität von ca. sechs Größenordnungen (siehe etwa Abb. 9) mit einer geringen Anzahl von Schwellenwerten wiederzugeben. Auf der einen Seite soll der Kontinuumsverlauf soweit erfaßt werden, daß das Temperaturverhalten beim Übergang in die optisch dünnen Gebiete realistisch wiedergegeben wird. Auf der anderen Seite muß dafür Sorge getragen werden, daß die Linienopazität ausreichend Berücksichtigung findet, da diese die Energiebilanz in der höheren Photosphäre entscheidend mitbestimmt. Man ist hier zu Kompromissen gezwungen, deren Qualität letztlich erst durch Betrachtung der resultierenden selbstkonsistenten Temperaturschichtungen ermessen werden kann. Für eine günstige Wahl der Schwellenwerte und der Referenztiefe ist man also auf eine Reihe von Tests angewiesen, in denen diese Größen für die zu modellierende Atmosphäre optimiert werden.

Die  $\kappa$ -Sortierung ist im Laufe der Entwicklung des Mehrbandverfahrens durch eine andere — die  $\tau$ -Sortierung — abgelöst worden. Ausschlaggebend dafür ist die Tatsache, daß eine Sortierung nach Größe des Absorptionskoeffizienten in einer festen Tiefe günstig ist für Frequenzen, für die dort die monochromatische Tiefe ungefähr gleich eins ist. Für Frequenzen aber, die dort noch optisch dick sind, ist es irrelevant, wie man sie zusammenfaßt, da man bei Verwendung des Rosseland-Mittels ihre Energetik so oder so zufriedenstellend beschreiben kann. Daher sollte man diese Frequenzpunkte ebenfalls nach ihrem Absorptionskoeffizienten in der *jeweiligen monochromatischen* Tiefe  $\tau_\nu \approx 1$  sortieren. Dies führt auf die  $\tau$ -Sortierung, die im nächsten Abschnitt besprochen wird.

### 3.3.2 $\tau$ -Sortierung

Bei der  $\tau$ -Sortierung wird davon ausgegangen, daß für den betrachteten Spektraltyp eine eindimensionale Modellatmosphäre — im folgenden als Referenzatmosphäre bezeichnet — vorliegt. In dieser Atmosphäre läßt sich für jede Frequenz eine monochromatische optische Tiefenskala berechnen. Bei der  $\tau$ -Sortierung werden nun Frequenzpunkte zu einem Band zusammengefaßt, die in vergleichbarer geometrischer Tiefe die monochromatische optische Tiefe  $\tau_\nu = 1$  erreichen. Abb. 2 soll dieses Verfahren an einem Beispiel bei Vorgabe von vier Bändern erläutern. Als Maß für die geometrische Tiefe wird die Rosseland-Skala verwendet, die ja frequenzunabhängig ist und so diese Aufgabe erfüllen kann. Die drei Schwellenwerte<sup>9</sup>  $\tau_R^1$ ,  $\tau_R^2$  und  $\tau_R^3$  definieren vier Tiefenintervalle, die die Bandzugehörigkeit bestimmen. Eine Frequenz  $\nu$  wird dem Band  $i$  zugeordnet, falls

$$\tau_R^{i-1} \geq \tau_R(\tau_\nu = 1) > \tau_R^i \quad (3.54)$$

gilt. Die Randintervalle sind dabei als halboffen angenommen. Worin besteht nun der Vorteil der  $\tau$ -Sortierung gegenüber der  $\kappa$ -Sortierung? Geht man davon aus, daß der Absorptionskoeffizient pro Masseneinheit annähernd tiefenunabhängig ist, so wächst der Absorptionskoeffizient pro Längeneinheit, der die optische Tiefe bestimmt, aufgrund der nach innen exponentiell wachsenden Dichte ebenfalls exponentiell an. D.h.

<sup>9</sup>Die oberen Indizes dienen wieder nur zur Unterscheidung und sind keine Potenzen!

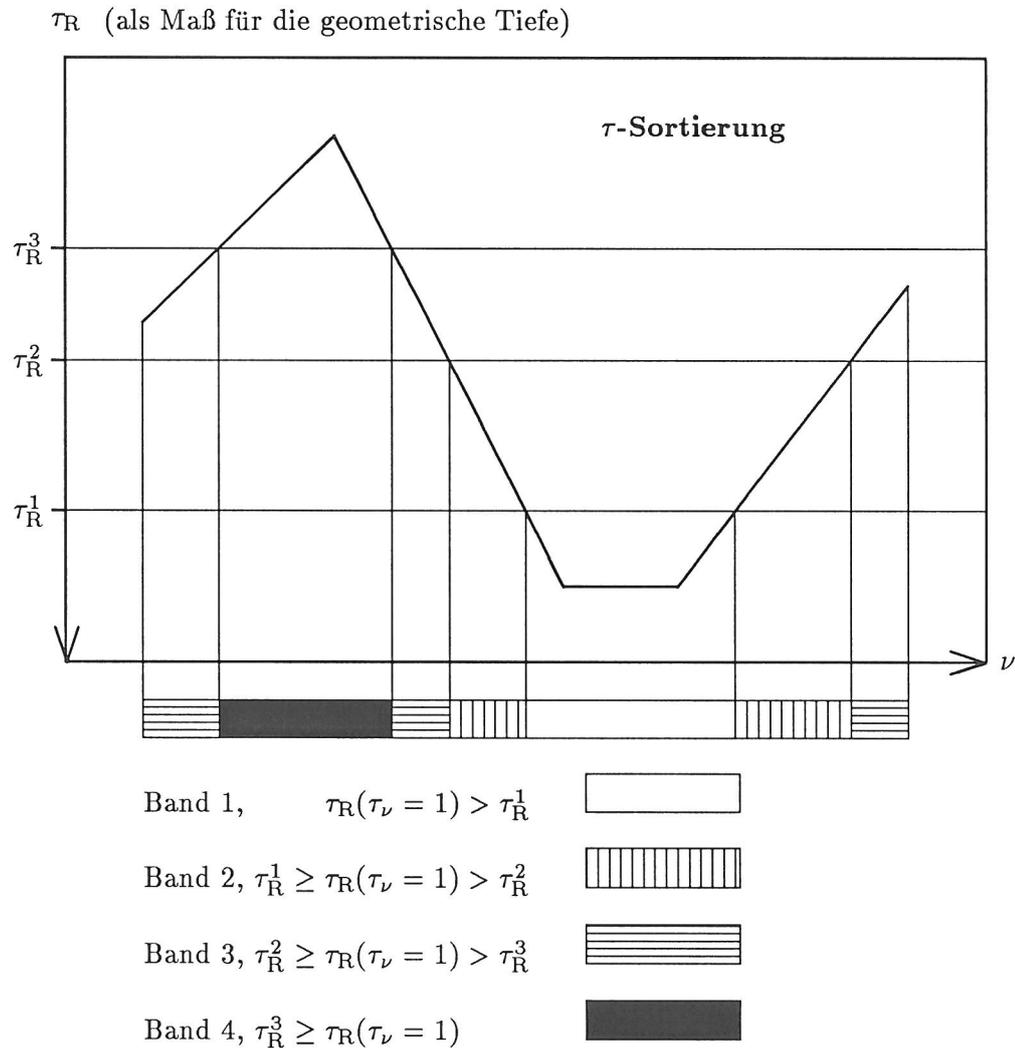


Abb. 2: Vergehensweise bei der  $\tau$ -Sortierung (schematisch): Dargestellt ist der Verlauf der  $(\tau_\nu = 1)$ -Tiefe in der planparallelen Referenzatmosphäre in Abhängigkeit der Frequenz. Als Maß für diese Tiefe wird die Rosseland-Skala verwendet. Man beachte die invertierte Ordinatenrichtung! Die Sortierung geschieht nach derjenigen Tiefe, in der die monochromatische optische Tiefe gleich eins wird. Die drei Tiefen  $\tau_R^1$ ,  $\tau_R^2$  und  $\tau_R^3$  definieren vier Intervalle, die die Bandzugehörigkeit festlegen. Eine Frequenz  $\nu$  wird in das Band  $i$  sortiert, falls  $\tau_R^{i-1} \geq \tau_R(\tau_\nu = 1) > \tau_R^i$  gilt. Segmente mit gleicher Schraffur an der Frequenzachse werden demselben Band zugeordnet. Man beachte, daß z.B. das Band, das durch horizontale Schraffur markiert ist, nicht zusammenhängend ist.

diejenigen Schichten einer Atmosphäre, die in der Nähe einer bestimmten optischen Tiefe liegen, tragen selbst am meisten zu der dort erreichten optischen Weglänge bei. Gleiche optische Tiefe an zwei Frequenzen bedeutet somit, daß sie auch ungefähr den gleichen Absorptionskoeffizienten in dieser Tiefe besitzen. Formal wird diese Korrelation in Gleichung (3.50) zur Tiefenschätzung ausgedrückt. Wir sehen also, daß die  $\tau$ -Sortierung wie die  $\kappa$ -Sortierung Frequenzpunkte in einem Band zusammenfaßt, an denen der Absorptionskoeffizient von vergleichbarer Größenordnung ist, was nach der grundlegenden Annahme (3.4) wünschenswert ist. Gleichzeitig geschieht dies in einer optischen Tiefe, in der das stellare Material an diesem Frequenzpunkt optisch dünn wird und eine einfache Beschreibung der Energiebilanz durch das Rosseland-Mittel, das mit der Diffusionsnäherung konsistent ist, nicht mehr möglich ist.

Typischerweise wird in der  $\tau$ -Sortierung eine äquidistante logarithmische Staffelung der Schwellentiefen von  $\Delta \log_{10}(\tau_R) = 1.5$  verwandt, um die Höhenvariation der  $(\tau_\nu = 1)$ -Tiefe wiederzugeben. Dieser Erfahrungswert hat sich bei der Anwendung im HD-Code für Hauptreihensterne der Spektraltypen G2 (Sonne) bis A0 (Wega) bewährt. Auf der geometrischen Skala bedeutet eine gleichmäßige logarithmische Staffelung in der optischen Tiefe in erster Näherung äquidistante Schritte, was für eine gleichberechtigte Erfassung des Strahlungsaustausches in den unterschiedlichen photosphärischen Höhen in den Hydrodynamikrechnungen vorteilhaft erscheint. Man kann eine derartige Einteilung der Frequenzpunkte dahingehend interpretieren, daß Frequenzen, an denen man das Kontinuum, schwache, mittelstarke sowie starke Linien vorfindet, jeweils in ein Band sortiert werden. Ein Band repräsentiert dann den Einfluß eines Absorbentyps. In diesem Sinne kann man von einem „Kontinuumsband“ oder „Linienband“ sprechen.

Auch aus einem anderen Blickwinkel heraus zeigt die  $\tau$ -Sortierung Vorzüge gegenüber der  $\kappa$ -Sortierung. Betrachtet man wieder den Spezialfall einer eindimensionalen Sternatmosphäre, so gilt für die winkelgemittelte Intensität  $J_\nu$  in der optischen Tiefe  $\tau_\nu$

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu} [B_\nu] , \quad (3.55)$$

wobei der  $\Lambda$ -Operator angewandt auf eine Funktion  $f$  als

$$\Lambda_{\tau_\nu} [f(t)] \equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t) E_1 |t - \tau_\nu| dt \quad (3.56)$$

definiert ist.  $E_1$  ist die erste Integraleponentialfunktion. Wie man anhand seiner Definition erkennt, ist der  $\Lambda$ -Operator linear bezüglich  $f$ . Besitzen zwei Frequenzen den gleichen Verlauf des Absorptionskoeffizienten und damit die gleiche optische Tiefenskala, so gehört zu ihnen der gleiche  $\Lambda$ -Operator. Da  $\Lambda$  linear ist, kann man in diesem Fall bei der Berechnung des Frequenzintegrals der Intensität  $J_\nu$  zur Bestimmung des gesamten Strahlungsaustausches die Anwendung des  $\Lambda$ -Operators — d.h. die Lösung der Strahlungstransportgleichung — und die Frequenzintegration vertauschen; symbolisch geschrieben als

$$J = J_1 + J_2 = \Lambda_{\tau_1} [B_1] + \Lambda_{\tau_2} [B_2] = \Lambda_\tau [B_1 + B_2] , \quad (3.57)$$

wobei

$$\Lambda_{\tau_1} = \Lambda_{\tau_2} = \Lambda_\tau . \quad (3.58)$$

Bei der  $\tau$ -Sortierung werden nun Frequenzen zusammengefaßt, die zumindest in einer bestimmten geometrischen Tiefe eine vergleichbare optische Tiefe besitzen. Da der globale Verlauf des monochromatischen Absorptionskoeffizienten pro Längeneinheit

vorwiegend durch die exponentielle Dichteschichtung dominiert wird, sollte zumindest im Mittel ein Vorgehen nach Gleichung (3.57) zulässig sein. Nach (3.57) werden die etwas variablen  $\Lambda$ -Operatoren für die Frequenzpunkte in einem Band durch einen charakterischen mittleren Operator ersetzt, für dessen Ermittlung die  $\tau$ -Sortierung besonders geeignet erscheint, da sie Eigenheiten der individuellen  $\tau_\nu$ -Skalen berücksichtigt.

### 3.3.3 Zusätzliche Sortierkriterien

Durch Vorgabe zusätzlicher Sortierkriterien ist es — allerdings um den Preis einer höheren Zahl von Frequenzsätzen — möglich, die  $\kappa$ - oder  $\tau$ -Sortierung zu verfeinern. Dies hat sich im Fall der Wegaatmosphäre als notwendig erwiesen und wird bei der Besprechung der einzelnen Mehrbandbeschreibungen eingehender begründet.

Als zusätzliches Sortierkriterium wird in diesem Beispiel direkt die Frequenz benutzt; wendet man die  $\tau$ -Sortierung in der Wegaatmosphäre an, so zeigt sich, daß sich das resultierende Kontinuumsband über einen weiten Frequenzbereich erstreckt, der Frequenzen kurz- und langwellig von der Balmerkante umfaßt. Obwohl diese Frequenzen in der gleichen geometrischen Tiefe transparent werden, was im Rahmen der  $\tau$ -Sortierung zu ihrer Zusammenfassung führt, besitzen sie ein gänzlich unterschiedliches Ein- bzw. Ausstrahlungsverhalten. Die gesamte Nettostrahlungsbilanz in diesem Band liegt nahe bei null, wobei aber Frequenzpunkte kurzwellig der Balmerkante für eine starke radiative Heizung, Frequenzpunkte langwellig der Balmerkante für eine starke radiative Kühlung des stellaren Materials sorgen. Nach den Kriterien auf Seite 21 ist dies eine Situation, bei der die Benutzung des Planck-Mittels ungünstig ist. Für die Wiedergabe der Energiebilanz hat es sich denn als sehr vorteilhaft erwiesen, das Kontinuumsband in zwei Bänder zu splitten, die jeweils die Bereiche kurz- und langwellig der Balmerkante umfassen.

Als zusätzliches Sortierkriterium wird also die Frequenz selbst eingeführt. Je nachdem ob ein Frequenzpunkt kurz- oder langwellig von einer kritischen Frequenz — hier der Frequenz der Balmerkante — liegt, wird er dem einen oder anderen Band zugeordnet. Bisher hat sich diese Vorgehensweise nur im Kontinuumsband für Wega als notwendig erwiesen.

## 3.4 Eingangsdaten

Um Opazitäten für das Mehrbandverfahren berechnen zu können, müssen die Elementhäufigkeiten, die Absorptionskoeffizienten der verschiedenen Absorberatome und die Zustandsgleichung des stellaren Plasmas bekannt sein. Die benötigten Absorptionskoeffizienten und die Zustandsgleichung liefern Routinen des bereits erwähnten ATLAS6-Codes. Hierauf wird in den folgenden Abschnitten näher eingegangen. Wir beginnen die Beschreibung der Eingangsdaten mit den Elementhäufigkeiten.

### 3.4.1 Elementhäufigkeiten

Für die Atmosphären der Hauptreihensterne werden durchgehend photosphärische *solare Elementhäufigkeiten* nach HOLWEGGER, 1979, zugrundegelegt. Effekte von Häufigkeitsänderungen auf die hydrodynamischen Vorgänge werden so im Rahmen dieser Arbeit ausgeschlossen. Die in den Hauptreihensternen verwendeten relativen Häufigkeiten nach Teilchenzahl sind in Tabelle 2 aufgeführt. Die Häufigkeiten sind logarithmisch angegeben, wobei die Wasserstoffhäufigkeit definitionsgemäß 12

beträgt. Sie werden im folgenden als „Standardhäufigkeiten“ oder auch als „meteoritische Häufigkeiten“ bezeichnet. Die letztere Bezeichnung hat ihren Grund darin, daß die veranschlagten Häufigkeiten bis auf die Elemente Wasserstoff, Helium, Lithium, Beryllium, Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff denen entsprechen, die man in einer speziellen Klasse von Meteoriten, den kohligen Chondriten vom Typ C1, vorfindet. Von ihnen wird angenommen, daß sie weitgehend unprozessierte Materialproben aus dem frühen Sonnensystem darstellen (siehe HOLWEGGER, 1979), was die Übereinstimmung mit den photosphärischen solaren Häufigkeiten erklärt.

Für den Weißen Zwerg wird eine nahezu reine Wasserstoffatmosphäre mit einer Spur ( $10^{-6}$  nach Teilchenzahl) Helium angenommen. Der Heliumanteil wurde nur aus programmtechnischen Gründen hinzugefügt.

### 3.4.2 ATLAS6 Opazitäten, ODF-Approximation und Frequenzgitter

Aufgrund ihrer unterschiedlichen physikalischen Entstehungsmechanismen unterscheidet man zwischen kontinuierlicher und Linienabsorption. Linienabsorption verursacht Variationen des Absorptionskoeffizienten auf kleinen Frequenzskalen, während die kontinuierliche Absorption — wie schon der Name sagt — Variationen auf vergleichsweise langen Skalen bewirkt. Die kontinuierliche Absorption hat einen „glatten“ Verlauf, solange man keine Absorptionskante überstreicht. Diese grundsätzlich verschiedenen Charakteristika schlagen sich in der Art und Weise nieder, wie die entsprechenden Opazitäten in der Berechnung einer Modellatmosphäre berücksichtigt werden. Ein Blick auf das Spektrum eines kühleren Hauptreihensternes — etwa der Sonne — mit seinen größenordnungsmäßig  $10^6$  Spektrallinien lehrt, daß es bei dem heutigen Stand der Computertechnik aussichtslos ist, den Frequenzverlauf der Linienabsorption in allen Details bei der Berechnung der Temperaturschichtung einbeziehen zu wollen. Für die kontinuierliche Absorption hingegen ist dies aufgrund ihres relativ glatten Frequenzverlaufes mit einer moderaten Anzahl von Frequenzpunkten möglich. Bei der Linienabsorption wird man auf sinnvolle Vereinfachungen angewiesen sein, die das Problem einer numerischen Behandlung zugänglich machen. Zur Approximation der Linienabsorption sind verschiedene Konzepte<sup>10</sup> entwickelt worden:

**Multigroup methods:** Das in dieser Arbeit in einem anderen Kontext entwickelte Verfahren gehört zu dieser Klasse.

**Opacity sampling:** Dieses Verfahren benutzt Monte-Carlo-Techniken zur Lösung des Line-Blanketing Problems (siehe etwa PEYTRMANN, 1974).

**Opacity distribution functions (ODFs):** Diese ebenfalls statistische Methode wird im ATLAS6-Code verwendet.

Zunächst muß zur Berechnung einer Modellatmosphäre in ODF-Approximation ein geeignetes Frequenzgitter festgelegt werden. Dabei ist zu gewährleisten, daß Quellfunktion und Kontinuumsabsorption in den entstehenden Frequenzintervallen als konstant angesehen werden können. Bei der Festlegung der Intervallgrenzen berücksichtigt man zweckmäßigerweise besonders die Lage der Absorptionskanten im Spektrum, um so starke Schwankungen der Kontinuumsabsorption zu vermeiden. ATLAS6 benutzt standardmäßig ein Gitter von 122 Punkten mit einer Wellenlängenauflösung von typischerweise 10 nm. Es umfaßt einen Wellenlängenbereich von

<sup>10</sup>Es werden die englischen Bezeichnungen verwendet, da sich keine entsprechenden deutschen eingebürgert haben.

Z	Element	Atommasse [AMU]	Relative Logarithmische Häufigkeit
1	H	1.0080	12.000
2	He	4.0026	11.000
3	Li	6.9410	1.000
4	Be	9.0122	1.150
6	C	12.0111	8.670
7	N	14.0067	7.990
8	O	15.9994	8.920
10	Ne	20.1790	7.730
11	Na	22.9898	6.280
12	Mg	24.3050	7.530
13	Al	26.9815	6.430
14	Si	28.0860	7.500
15	P	30.9738	5.350
16	S	32.0600	7.200
18	Ar	39.9480	6.830
19	K	39.1020	5.050
20	Ca	40.0800	6.360
21	Sc	44.9560	2.990
22	Ti	47.9000	4.880
23	V	50.9414	3.910
24	Cr	51.9960	5.610
25	Mn	54.9380	5.470
26	Fe	55.8470	7.460
27	Co	58.9332	4.850
28	Ni	58.7100	6.180
29	Cu	63.5460	4.240
30	Zn	65.3700	4.600
38	Sr	87.6200	2.930
39	Y	88.9059	2.180
40	Zr	91.2200	2.460
56	Ba	137.3400	2.180
57	La	138.9060	1.070
58	Ce	140.1200	1.580
60	Nd	144.2400	1.400
62	Sm	150.4000	0.880
63	Eu	151.9600	0.480
74	W	183.8500	0.980
76	Os	190.2000	1.340
90	Th	232.0380	0.160

Tabelle 2: Standardelementhäufigkeiten: Angegeben sind die Ordnungszahl Z, das Symbol, die Atommasse und die relative logarithmische Häufigkeit. Die Werte sind bezogen auf eine logarithmische Wasserstoffhäufigkeit von 12.

22.9 nm bis 200000 nm. Zum Ultravioletten hin wird die Wellenlängenauflösung verfeinert, zum Infraroten hin vergrößert. Um den Balmer Sprung herum wird ebenfalls mit einer erhöhten Auflösung gearbeitet, damit dieser besonders auffälligen Diskontinuität im Flußspektrum vieler Sterne besser Rechnung getragen werden kann. In jedem der einzelnen Frequenzintervalle wird nun der Linienabsorptionskoeffizient einer statistischen Analyse unterzogen. Für vorgegebenen thermodynamischen Zustand — hier charakterisiert durch Temperatur und Elektronendruck — sowie Mikroturbulenz und Elementhäufigkeit wird die Verteilungsfunktion des Linienabsorptionskoeffizienten mit der Frequenz ermittelt. Man erhält eine Auskunft darüber, welcher Bruchteil des betrachteten Frequenzintervalls einen Absorptionskoeffizienten kleiner als einen vorgegebenen Schwellenwert besitzt. Die so auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  (Intervallbruchteil) definierte *opacity distribution function (ODF)* besitzt einen glatten und monotonen Verlauf. Der eigentliche Trick ist nun, anstatt des Verlaufs des wahren Linienabsorptionskoeffizienten im Intervall den der ODF zu benutzen. Die Benutzung der ODF läuft auf eine *Umsortierung* der Linienopazität hinaus; die Linien werden nach ihrer Stärke im Intervall umgeordnet. In ATLAS6 wird so vorgegangen, daß jedes der 122 Frequenzintervalle in 10 Teilintervalle eingeteilt wird. Sie nehmen der Reihe nach 1/60, 2/60, 3/60, 6/60, 6/60, 6/60, 6/60, 10/60, 10/60 und 10/60 des gesamten Intervalls ein. Die Umverteilung der Frequenzpunkte in dem betrachteten Frequenzintervall geschieht auf einem sehr feinen Frequenzgitter, das die Profile der Linien aufzulösen vermag. Als schematisches Beispiel, das die Vorgehensweise verdeutlichen soll, sei hier ein äquidistantes Gitter mit 600 Frequenzpunkten betrachtet. Diejenigen 10 Frequenzpunkte, an denen die höchsten Linienopazitäten auftreten, werden dem ersten Subintervall zugeordnet. Die nach Größe der Linienopazität nächsten 20 dem zweiten Subintervall usw., bis alle Punkte einem der 10 Subintervalle zugeordnet sind. In jedem Subintervall schwankt der Linienabsorptionskoeffizient nicht mehr stark und kann als konstant angesehen werden. Auf diese Weise wird erreicht, daß zur Berechnung des Strahlungsfeldes der Strahlungstransport nur einmal in jedem Subintervall gelöst werden muß, trotzdem aber dem Einfluß der sehr großen Zahl von Spektrallinien Rechnung getragen wird. In diesem Sinne wird in ATLAS6 das Spektrum mit Hilfe von 1220 Frequenzpunkten modelliert. Die ODFs werden vorab anhand von umfangreichen Linienlisten erstellt und in Abhängigkeit von Metallizität, Mikroturbulenz, Elektronendruck und Temperatur tabelliert. Für eine eingehende Beschreibung des ODF-Konzepts und die Implementation in ATLAS6 siehe KURUCZ (1979).

Die im Rahmen dieser Arbeit erstellten Mehrbandbeschreibungen verwenden für die Hauptreihenmodelle als Quelle der Linienopazität die ODF mit solarer Metallizität und einer Mikroturbulenz von 2 km/s (File DFBP00). Es ist zu bemerken, daß Moleküllinien nicht enthalten sind. Erst die neuesten ODFs von KURUCZ (1991), umfassen neben weiteren atomaren auch Linien diatomarer Moleküle. In Zukunft wird es wünschenswert sein, die Molekülopazitäten zu berücksichtigen, da sie auf die Temperaturstruktur der oberen Photosphären in kühleren Spektraltypen einen Einfluß haben können. In hydrodynamischen Modellen der Sonnenatmosphäre zeigt sich, daß Kohlenmonoxid eine merkliche Abkühlung der oberen Photosphäre bewerkstelligt (STEFFEN und MUCHMORE, 1987).

Zur Beschreibung der kontinuierlichen Absorption werden folgende Beiträge berücksichtigt:

- H I gebunden–frei und frei–frei, H I Rayleigh-Streuung
- $H_2^+$  gebunden–frei und frei–frei

- $H^-$  gebunden–frei und frei–frei
- He I gebunden–frei und frei–frei, He II gebunden–frei und frei–frei
- C I gebunden–frei und frei–frei, C II-IV gebunden–frei
- N II-V gebunden–frei
- O II-VI gebunden–frei
- Mg I gebunden–frei und frei–frei
- Si I gebunden–frei und frei–frei
- Al I gebunden–frei und frei–frei
- Ne I-VI gebunden–frei
- Elektronen-Streuung

KURUCZ (1979) verwendet diese Opazitätsquellen zur Berechnung seines Gitters von Modellatmosphären. Sie sollten für Atmosphären ausreichend sein, die nicht stark wasserstoffunterhäufig sind. Es sei hier nochmal darauf hingewiesen, daß in den hydrodynamischen Simulationsrechnungen Streuung als wahre Absorption behandelt wird.

Das Frequenzgitter, das im ATLAS6-Code zur Beschreibung des Strahlungsfeldes zugrundegelegt wird, wird im Mehrbandverfahren verwendet, um Frequenzintegrale auszurechnen. Zur Diskretisierung der Integrale, wie man sie zur Ermittlung der mittleren Absorptionskoeffizienten (z.B. in Gleichung (3.16)) und der bandintegrierten Anteile der Kirchhoff-Planck-Funktion benötigt, werden dieselben Stützstellen und Gewichte herangezogen.

### 3.4.3 Interpretation von Abbildungen wellenlängenabhängiger Größen

Bei der Interpretation von Abbildungen in dieser Arbeit, die frequenz- bzw. wellenlängenabhängige Größen darstellen, ist stets zu berücksichtigen, daß die Linienabsorption in ODF-Näherung beschrieben wird. Als Beispiel betrachte man Abbildung 20. Sie zeigt den Verlauf des Absorptionskoeffizienten so, wie er durch das Gitter repräsentiert ist. In der Beispielabbildung erkennt man im Infraroten gut das relativ grobe Stufenmuster, das zu den 122 Frequenzintervallen gehört, die zur Modellierung der Kontinuumsabsorption zugrundegelegt sind. Überlagert ist jeder Stufe ein feineres Stufenmuster, das den 10 ODF-Subintervallen entspricht. Ihre Breite gibt die oben angegebenen Bruchteile am Gesamtintervall wieder. Im Prinzip ist die Lage der ODF-Subintervalle willkürlich. In allen Abbildungen geschieht die Darstellung der Subintervalle in jedem der 122 Frequenzintervalle in der Reihenfolge von großen zu kleinen Linienopazitäten.

Mit der ODF-Näherung ist eine weitere Eigentümlichkeit verknüpft, auf die hier hingewiesen werden soll. Die Maxima des Absorptionskoeffizienten in der Beispielabbildung, die man naiv als Linien im Spektrum ansehen könnte, erscheinen über weite Bereiche des Spektrums äquidistant zu liegen. Dies entspricht selbstverständlich in keiner Weise den natürlichen Gegebenheiten. Es ist nur Ausdruck des über gewisse Bereiche äquidistanten Gitters, auf dem die ODF-Beschreibung realisiert ist. In der Nähe der Balmerkante erscheinen die „Linien“ verdichtet, da hier die Auflösung des Frequenzgitters feiner ist. Trotz der Gefahr einer Mißdeutung werden die Opazitätsmaxima im Rahmen dieser Arbeit als „Linien“ bezeichnet.

#### 3.4.4 ODF-Näherung versus Mehrbandbeschreibung

Auf den ersten Blick könnte man zu dem Schluß kommen, daß das Mehrbandverfahren eine ODF-Beschreibung des Absorptionskoeffizienten auf einem groben Frequenzgitter darstellt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Bei der ODF-Approximation wird in jeder Tiefe eine *Umordnung* der Frequenzpunkte derart vorgenommen, daß bei einer bestimmten Frequenz tiefenunabhängig entweder stets eine große oder kleine Opazität vorliegt. Die ODF-Approximation arbeitet mit der Annahme, daß das Verhalten des Linienabsorptionskoeffizienten in verschiedenen Tiefen korreliert ist. Dies ist vernünftig, solange sich in einer Atmosphäre die Ionisations- und Anregungsbedingungen nicht so drastisch ändern, daß etwa ein für die Linienabsorption wichtiges Element seine Ionisationsstufe wechselt.

Im Mehrbandverfahren hingegen bleibt die Beziehung zwischen Frequenz und Opazität erhalten. Die Zusammenfassung der Frequenzpunkte geschieht anhand ähnlicher Opazität in einer bestimmten Tiefe. Anders als bei der ODF-Approximation, bei der in einem Subintervall stets Opazitäten vergleichbarer Größe auftreten, braucht beim Mehrbandverfahren dies in einer anderen Tiefe nicht mehr erfüllt sein, und Opazitäten unterschiedlicher Größenordnung werden in einem Frequenzsatz vermischt. Damit das Mehrbandverfahren zufriedenstellend arbeitet, ist die gleiche Voraussetzung wie in der ODF-Approximation zu erfüllen, nämlich daß die Verläufe der Opazität in verschiedenen Tiefen miteinander korreliert sind. Wird diese Annahme verletzt, erhält man im Grenzfall völligen Fehlens einer Korrelation eine weitgehend graue Näherung für den Strahlungstransport. Dieses Verhalten ist im Fall der ODF-Approximation nicht gewährleistet. Schon von daher wäre der ODF-Ansatz wenig geeignet, den Strahlungstransport unter Verwendung weniger Frequenzpunkte zu beschreiben. Darüber hinaus kann unter diesen Bedingungen auch die weitere Grundannahme, daß die Quellfunktion über ein Frequenzband wenig variiert, nicht erfüllt werden.

Das Mehrbandverfahren hat die Eigenschaft, auch im Grenzfall einer sehr großen Zahl von Frequenzbändern den Strahlungstransport *nicht* exakt zu beschreiben. Im Mehrbandverfahren wächst die Zahl der entstehenden Frequenzbänder mit der Zahl der Schwellenwerte, die bei der Zusammenfassung der Frequenzpunkte zu Bändern vorgegeben wird. Egal wie fein man dabei die Staffelung der Schwellenwerte wählt, nie ist gewährleistet, daß zusammenhängende Frequenzbänder entstehen. Damit bleibt stets die Möglichkeit bestehen, daß die Variation des Absorptionskoeffizienten im jeweiligen Band nicht in allen Tiefen verschwindet. Die Wiedergabe der Absorption durch eine mittlere Opazität ist dann mit Fehlern behaftet. Bei der ODF-Approximation arbeitet man üblicherweise mit zusammenhängenden Frequenzintervallen. Sie liefert daher im betrachteten Grenzfall exakte Verhältnisse.

#### 3.4.5 ATLAS6 Zustandsgleichung

Für die Berechnung des Aufbaus einer Sternatmosphäre ist die detaillierte Kenntnis der Ionisationszustände der vorkommenden Elemente notwendig. Der Ionisationsgrad der verschiedenen Atome bestimmt den herrschenden Elektronendruck und so entscheidend den Zusammenhang zwischen Gasdruck, Temperatur und Dichte des stellaren Plasmas, wie er durch die *Zustandsgleichung* beschrieben wird. Eng verbunden mit der Modellierung der Zustandsgleichung ist die Berechnung der Opazität. Ionisations- und Anregungsverhältnisse bestimmen die Anzahl der jeweiligen Absorber in der Atmosphäre und damit den resultierenden Absorptionskoeffizienten. Wie im Fall der Opazitäten wird auch bei der Zustandsgleichung auf die Routinen des

ATLAS6-Codes zurückgegriffen. Für eine eingehende Beschreibung der Implementierung und numerischen Vorgehensweise siehe KURUCZ, (1970).

Grundsätzlich geht man zur Modellierung der Zustandsgleichung von einer homogenen Mischung von Elementen mit vorgegebenen relativen Häufigkeiten aus. Wegen der hohen Temperaturen, die in Sternatmosphären herrschen, müssen dabei Ionisationsvorgänge der Form



und Dissoziationsvorgänge der Form



miteinbezogen werden. Gleichung (3.59) beschreibt den Übergang eines  $k$ -fach ionisierten Atoms  $A$  in die nächsthöhere Ionisationsstufe, Gleichung (3.60) die Bildung eines binären Moleküls  $AB$  aus den atomaren Konstituenten  $A$  und  $B$ . Im Prinzip ist die Bildung komplizierterer Verbindungen aus drei oder mehr Atomen möglich. Bei Kenntnis der Dichte aller beteiligten Teilchenkomponenten erhält man für den Gasdruck  $p_g$ , solange das Plasma als ideales Gas angesehen werden kann,

$$p_g = nkT. \quad (3.61)$$

$n$  ist die Gesamtteilchendichte. Im Bereich hoher Dichten muß mit Abweichungen von der Beziehung (3.61) gerechnet werden, da dort der Entartungsdruck der Elektronen oder die elektrostatischen Wechselwirkung der Ionen im Plasma wichtig werden können.

Im Rahmen der Berechnung der Zustandsgleichung für das Mehrbandverfahren wird von striktem LTE ausgegangen. Ferner wird angenommen, daß die Ideale Gasgleichung (3.61) gilt. Die Gleichgewichtskonzentrationen der Reaktionspartner in den Gleichungen (3.59) und (3.60) sind dann durch die Saha-Boltzmann-Statistik gegeben. Standardmäßig wird in der Zustandsgleichung bei der Berechnung von Opazitäten für das Mehrbandverfahren Molekülbildung nach Gleichung (3.60) nicht berücksichtigt. Deshalb soll diese hier nicht weiter diskutiert werden. Die Teilchendichten in aufeinander folgenden Ionisationsstufen eines Atoms liefert die Saha-Gleichung

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} p_e = \frac{U_{k+1}(T, \epsilon)}{U_k(T, \epsilon)} 2 \frac{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} \exp\left(-\frac{\Delta E - \epsilon}{kT}\right). \quad (3.62)$$

Hier sind  $n_k$  und  $n_{k+1}$  die Teilchendichten der  $k$ -ten bzw.  $(k+1)$ -Ionisationsstufe des Atoms  $A$ .  $p_e$  ist der Elektronendruck,  $m_e$  die Elektronenmasse,  $k$  die Boltzmannkonstante und  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum.  $\Delta E$  ist die Ionisationsenergie des ungestörten atomaren Systems,  $\epsilon$  der Energiebetrag, um den diese Energie aufgrund des Einflusses von geladenen Nachbarpartikeln im Plasma abgesenkt wird.  $U_k$  und  $U_{k+1}$  sind die Zustandssummen für die Ionen. Sie sind neben der Temperatur auch vom Betrag der Absenkung der Ionisationsenergie  $\epsilon$  abhängig. Bei der Berechnung des Elektronendruckes wird im ATLAS6-Code die Ionisation von zehn Elementen (H, He, C, Na, Mg, Al, Si, K, Ca, Fe) gemäß Gleichung (3.62) miteinbezogen. Man erhält ein Gleichungssystem, das unter den Nebenbedingungen der Ladungs- und der Teilchenerhaltung gelöst wird.

Abb. 3 zeigt den Zusammenhang von Elektronen- und Gasdruck für verschiedene Temperaturen, wie ihn die Zustandsgleichung des ATLAS6-Codes für die im Mehrbandverfahren verwendeten Standardelementhäufigkeiten liefert. Als Temperaturparameter dient die Größe  $\Theta = 5040 \text{ K}/T$ . Die unterste Isotherme entspricht

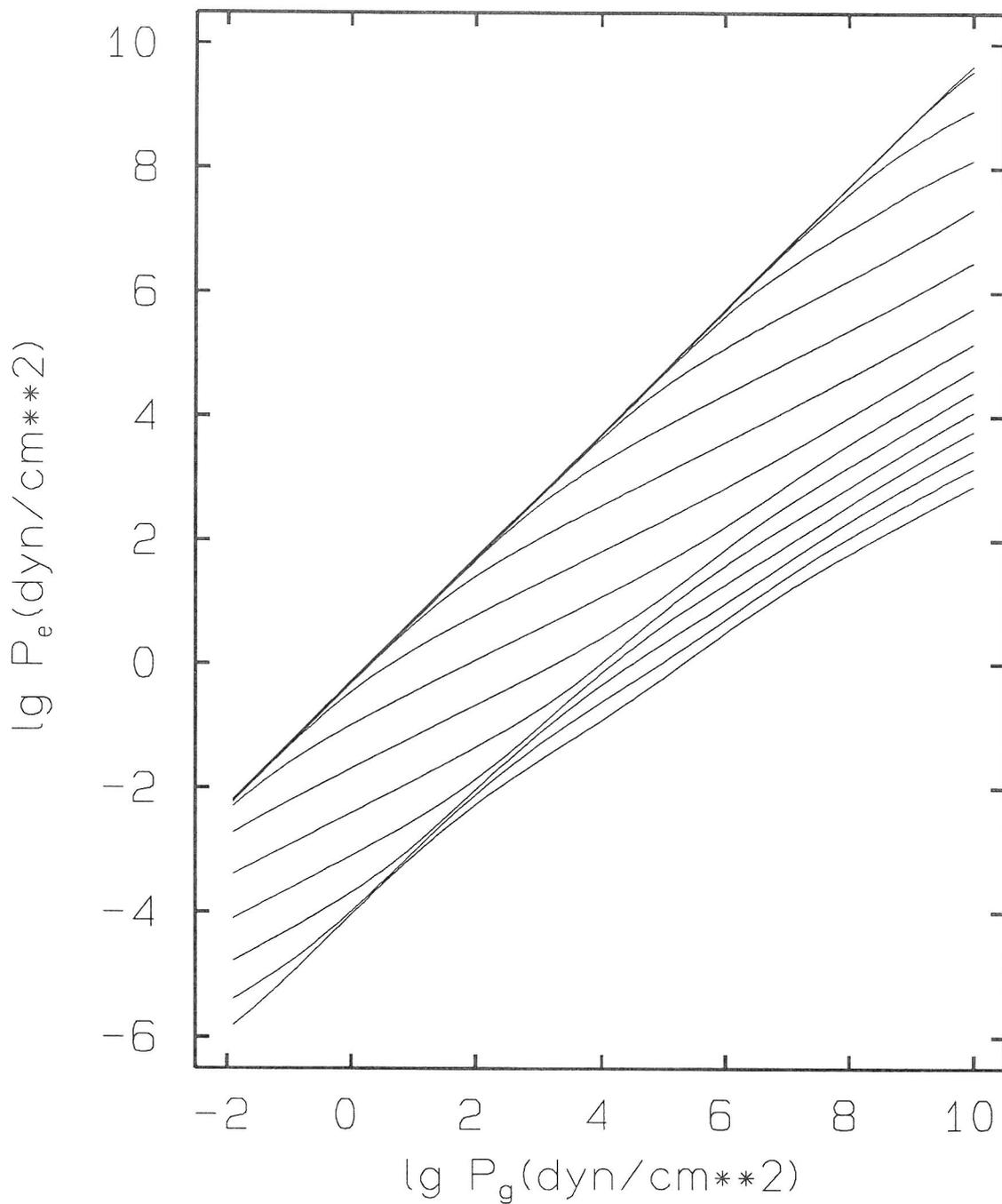


Abb. 3: Elektronendruck als Funktion des Gasdrucks für verschiedene Temperaturen; Für die Darstellung ist die im ATLAS6-Code implementierte Zustandsgleichung verwendet worden. Als Elementhäufigkeiten wurden die im Mehrbandverfahren verwendeten Standardwerte nach Tabelle 2 zugrundegelegt. Eingezeichnet sind 15 Isothermen. Als Temperaturparameter dient  $\Theta = 5040 \text{ K}/T$ . Die Isothermen entsprechen von oben nach unten Temperaturen von  $\Theta = 0.07$  und — dann in Schritten von 0.1 —  $\Theta = 0.1$  bis  $\Theta = 1.4$ .

einer Temperatur von 3600 K ( $\Theta = 1.4$ ), die oberste einer von 72000 K ( $\Theta = 0.07$ ). Diese Elektronendrucke sind mit entsprechenden Drücken verglichen worden, die die Routine IONDIS des Kieler Modellatmosphärencodes ATMOS liefert. Gegenüber ATLAS6 werden in IONDIS zur Berechnung des Elektronendruckes Molekülbildung sowie die Ionisation weiterer Elemente berücksichtigt. Für Gasdrücke im Gebiet  $-2 < \lg p_g \leq 5$  und im gesamten dargestellten Temperaturbereich sind die Abweichungen kleiner als 5%, für Gasdrücke im Gebiet  $5 < \lg p_g \leq 8$  und einem Temperaturbereich von  $6300 \text{ K} \leq T \leq 72000 \text{ K}$  ( $0.8 \geq \Theta \geq 0.07$ ) kleiner als 10%. Im Hinblick auf die Anwendung im Mehrbandverfahren sollte damit die Genauigkeit der Zustandsgleichung, die im ATLAS6-Code implementiert ist, voll ausreichend sein.

### 3.5 Druck/Temperaturgitter und Interpolation

Quellfunktion und Opazität für jedes Band sind Funktionen der Temperatur bzw. des Druckes und der Temperatur. Sie werden an diskreten Stützstellen tabelliert. Funktionswerte für beliebig vorgegebene Drücke und Temperaturen werden durch Interpolation in den erstellten Tabellen berechnet, wobei für beide Parameter dasselbe eindimensionale Interpolationsverfahren verwendet wird. Die Interpolation der Opazität im zweidimensionalen Druck/Temperaturgitter wird dabei auf mehrere eindimensionale Interpolationen zurückgeführt. Die Interpolation der Quellfunktion, die in Form der  $b_i(T)$ -Faktoren nach Gleichung (3.5) tabelliert ist, erscheint hier unkritisch, da die Faktoren mit der Temperatur nur langsam veränderlich sind und die Interpolation selbst nur eindimensional erfolgen muß. Im folgenden werden wir uns daher auf die Interpolation der Opazitäten  $\bar{\kappa}_i(p, T)$  konzentrieren. Sie werden als Logarithmen tabelliert.

Die Temperatur- und Druckstützstellen des Gitters, auf dem die Opazitäten tabelliert sind, werden abschnittsweise äquidistant auf der logarithmischen Skala vorgegeben. Das gesamte Werteintervall, das tabelliert werden soll, wird dabei in grobe Abschnitte eingeteilt, deren Länge verschieden sein kann. In jedem dieser Abschnitte erfolgt dann eine feine äquidistante Unterteilung. Zur Interpolation muß festgestellt werden, zwischen welchen tabellierten Werten von Druck und Temperatur diejenigen liegen, für die die Opazität bestimmt werden soll. Ein äquidistantes Gitter ermöglicht die direkte Berechnung dieses Intervalls, was einen Geschwindigkeitsvorteil gegenüber einem sukzessiven Vergleich, der bei einem nicht-äquidistanten Gitter nötig wäre, erbringt. Es wird bei dem hier verwendeten Verfahren durch einige wenige Vergleiche festgestellt, in welchem Grobabschnitt der zu interpolierende Wert liegt, und anschließend im äquidistanten Teilgitter das entgeltige Intervall berechnet.

Die eindimensionale Interpolation, die im Mehrbandverfahren benutzt wird, geht auf STEFFEN (1990) zurück. Dabei wird zur Interpolation im Satz der Stützstellen  $y_i(x_i)$  in jedem Intervall  $(x_i, x_{i+1})$  ein kubisches Polynom der Form

$$f_i(x) = A_i(x - x_i)^3 + B_i(x - x_i)^2 + C_i(x - x_i) + D_i \quad (3.63)$$

angepaßt. Die vier Koeffizienten werden durch Werte des Betrages und der Ableitung des Polynoms  $f$  auf den Rändern des Intervalls festgelegt. Das Polynom soll die Stützstellen passieren, so daß  $f_i(x_i) = y_i$  sowie  $f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  vorgegeben wird. Zur Bestimmung einer geeigneten Ableitung  $f'$  für das Polynom am Punkt  $x_i$  werden die nächsten Nachbarn  $x_{i-1}$  und  $x_{i+1}$  herangezogen. Man bestimmt die Parabel durch die drei Stützstellen und wählt als Ableitung am Ort  $x_i$  die entsprechende Parabelsteigung. Entsprechendes führt man für den anderen Randpunkt des betrachteten Intervalls durch. Das beschriebene Konstruktionsverfahren gewährleistet, daß der

Verlauf der interpolierenden Funktion, die stückweise aus kubischen Polynomen zusammengesetzt ist, über alle Stützstellen hinweg stetig und stetig differenzierbar ist. Das Verfahren kann dahingehend erweitert werden, daß zusätzlich ein monotoner Verlauf der interpolierenden Funktion zwischen den Stützstellen erzwungen wird; d.h. lokale Extrema können nur an den Stützstellen selbst auftreten. Dies geschieht durch geeignete Modifikation der berechneten Parabelsteigungen. Zu Einzelheiten sei nochmals auf die oben zitierte Arbeit verwiesen, in der auch auf die Detailfrage der Behandlung der Randintervalle eingegangen wird. In jedem Fall arbeitet die Interpolation — anders als etwa eine Interpolation mit Splines — lokal. Zum interpolierten Funktionswert tragen nur vier Stützstellen bei, die zwei, die das Intervall begrenzen, und die nächst benachbarten.

Das Interpolationsverfahren sei an einem Beispiel illustriert: Es wird ein zweidimensionales Problem betrachtet, das die Vorgehensweise bei der Interpolation der Opazitäten verdeutlicht. Abb. 4 zeigt das  $x - y$ -Gitter, auf dem interpoliert werden soll. Es sind darauf 36 Stützstellen durch Rauten markiert. Wie üblich sei mit  $z$  die zur  $x - y$ -Ebene senkrechte Koordinatenrichtung bezeichnet. An 32 Stützstellen ist  $z = 0$ . Nur an den vier zentralen Punkten (3,3), (3,4), (4,3) und (4,4) gilt  $z = 1$ . Anschaulich gesprochen handelt es sich also um einen „Berg“ auf einer glatten Ebene.

Zunächst stellt sich die Frage, wie dieses zweidimensionale auf das eindimensionale Interpolationsproblem zurückgeführt wird. Betrachtet sei hierzu der Ort  $(x_0, y_0)$ . Er liege zwischen den Stützstellen  $x_i$  und  $x_{i+1}$  bzw.  $y_j$  und  $y_{j+1}$ . Zunächst wird viermal in  $y$ -Richtung interpoliert. Dabei werden die eindimensionalen Funktionen  $z(y; x_{i-1})$ ,  $z(y; x_i)$ ,  $z(y; x_{i+1})$  sowie  $z(y; x_{i+2})$  bei jeweils festem  $x$  betrachtet, und die Funktionswerte für  $y = y_0$  interpoliert. Anschließend wird in  $x$ -Richtung an der Stelle  $y = y_0$ , wo nun für  $x = x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  Funktionswerte vorliegen, der Wert für  $x = x_0$  interpoliert. Die Interpolation im zweidimensionalen Gitter läßt sich damit auf fünfmalige Interpolation in einer Dimension zurückführen. Es sei hier bemerkt, daß das Verfahren nicht symmetrisch in  $x$  und  $y$  ist. Vertauscht man die Reihenfolge und interpoliert zuerst in  $x$ - und dann in  $y$ -Richtung, so erhält man im allgemeinen für den Funktionswert an der Stelle  $(x_0, y_0)$  nicht das gleiche Resultat. Für unser Beispiel ist diese Feststellung belanglos, da das Problem symmetrisch in  $x$  und  $y$  gestellt ist.

Was liefert die Interpolation für das Beispielproblem? Die Abbildungen 5 und 6 zeigen die Ergebnisse bei monotoner bzw. nichtmonotoner Interpolationsweise. Beide besitzen zur besseren Vergleichbarkeit denselben Maßstab. Im ersten Fall erhält man eine Art „Tafelberg“, bei dem die Funktionswerte im abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  liegen, also innerhalb des Spielraumes, der durch die Stützstellen vorgegeben wird. Ein Überschwingen des interpolierenden Polynoms zwischen den Stützstellen findet nicht statt. Bei nichtmonotoner Interpolation erhält man die glockenförmige Struktur, die in Abb. 6 gezeigt ist. Bei ihr treten Funktionswerte größer und kleiner als diejenigen in den vorgegebenen Stützstellen auf; das Maximum der „Glocke“ ist abgerundet wobei  $z_{\max} > 1$  ist, die Ebene  $z = 0$  weist leichte „Dellen“ auf, die auf Funktionswerte kleiner als null hinweisen. Bei Interpolation einer positiv definiten Funktion kann dies ein sehr störender Effekt sein. Von der physikalischen Seite her zählen etwa der Druck, die Entropie, die Temperatur und auch die Opazität zu solchen Funktionen.

Im Hinblick auf die Interpolation in den Opazitätstabellen, bei der nach dem obigen Verfahren zunächst in Temperatur- und dann in Druckrichtung<sup>11</sup> interpo-

<sup>11</sup>Die Reihenfolge wurde ohne Optimierung willkürlich festgelegt.

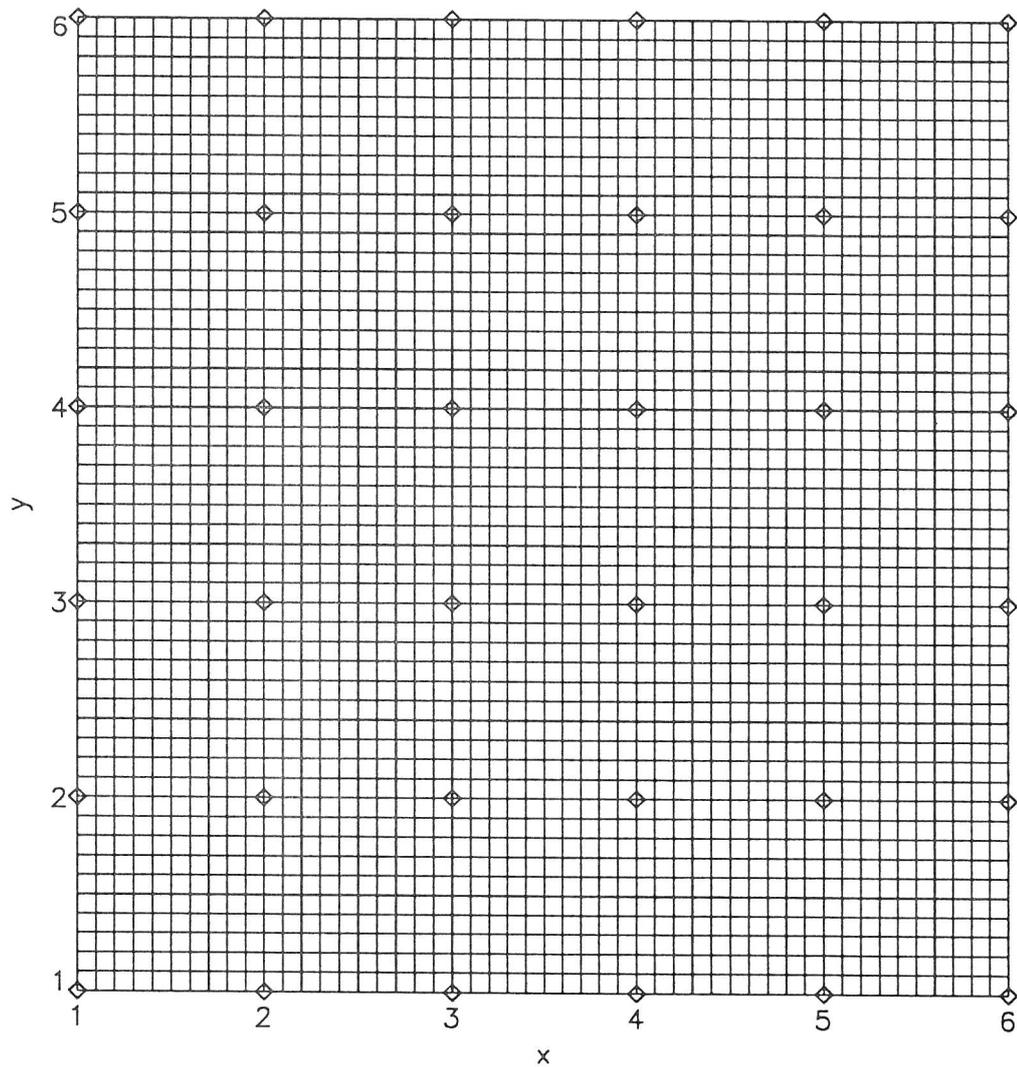


Abb. 4: Gezeigt ist das  $x - y$ -Gitter, auf dem interpoliert werden soll. Es werden 36 Stützstellen vorgegeben, die durch Rauten (◊) markiert sind. An 32 wird der Wert  $z = 0$  vorgegeben, nur die zentralen vier Punkte  $(3,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(4,3)$  und  $(4,4)$  besitzen einen Wert von  $z = 1$ .

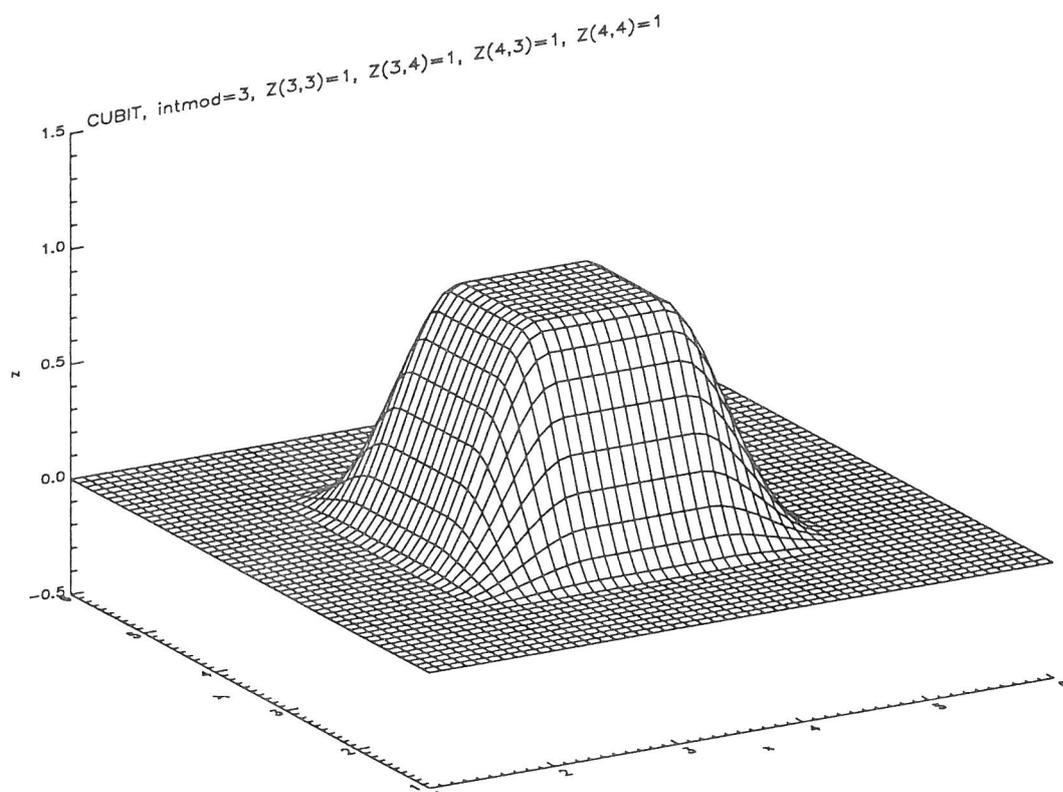


Abb. 5: Perspektivische Darstellung des Verhaltens  $z(x,y)$  des Beispiels aus Abb. 4 bei monotoner Interpolation. Diese erlaubt kein Überschwingen des interpolierenden Polynoms zwischen den Stützstellen. Als Konsequenz erhält man eine Art „Tafelberg“. Die auftretenden Funktionswerte  $z$  liegen im abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$ .

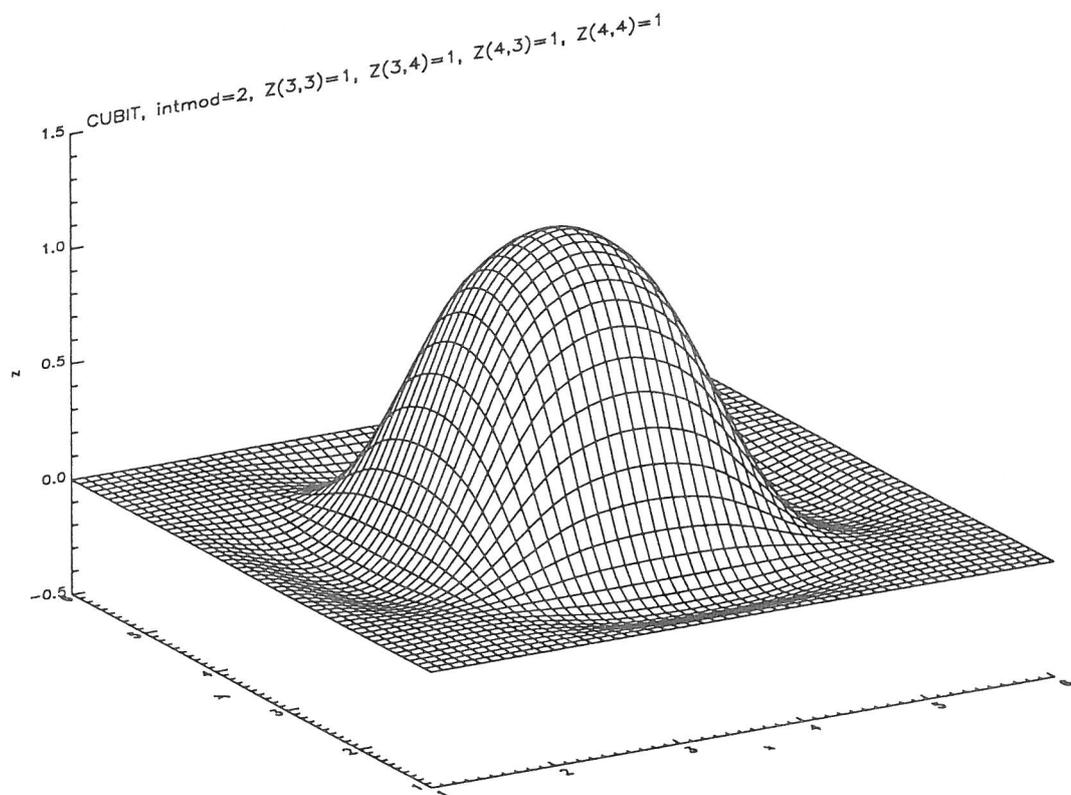


Abb. 6: Perspektivische Darstellung des Verhaltens  $z(x, y)$  des Beispiels aus Abb. 4 bei nichtmonotoner Interpolation. Diese erlaubt ein Überschwingen des interpolierenden Polynoms zwischen den Stützstellen. Als Konsequenz erhält man eine glockenförmige Struktur. Die auftretenden Funktionswerte  $z$  besitzen Werte größer als eins und kleiner als null.

liert wird, erweist sich dies als unkritisch. Es zeigt sich vielmehr, daß die Verwendung der nichtmonotonen Interpolation genauere Ergebnisse liefert. Dies hat seine Ursache darin, daß die monotone Interpolation bei lokalen Extrema, die wie in dem obigen Beispiel durch wenige Stützstellen repräsentiert werden, ein Abschneiden des Extremwertes verursacht. Eine glattere Fortsetzung der interpolierenden Funktion erweist sich den physikalischen Gegebenheiten angemessener, auch wenn nicht mehr *mathematisch* gesichert ist, daß der resultierende Opazitätswert positiv ist.

Um die nötige Gitterauflösung für das Interpolationsverfahren zu bestimmen, wurden für die Opazitätstabellen der Hauptreihenmodelle jeweils Tabellen mit doppelter Auflösung angefertigt. Die auf den Knoten des feineren Gitters exakt bekannten Opazitäten werden dabei mit denen verglichen, die man durch Interpolation in der größeren Tabelle erhält. Es zeigt sich, daß die größten Fehler in Bändern, die Linienopazitäten beinhalten, auftreten. Die Abbildungen 7 und 8 zeigen zwei Beispiele für die relativen Fehler, die durch das verwendete Gitter und das Interpolationsverfahren bedingt sind.

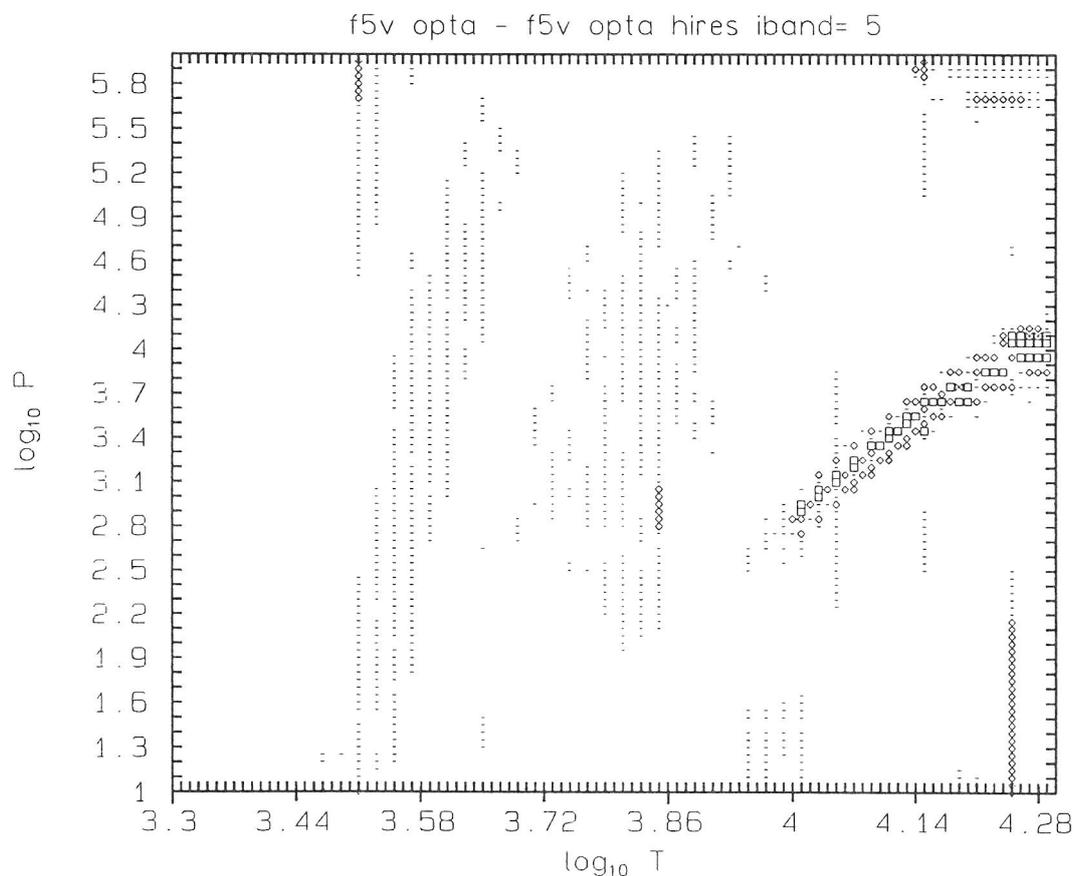


Abb. 7: Relative Abweichungen der interpolierten Opazität von der direkt berechneten in der Tabelle für den Spektraltyp F5V. Dargestellt ist in der Temperatur/Druck-Ebene der Fehler für Band 5, das die stärksten Linien repräsentiert. Der Betrag des Fehlers ist durch Symbole codiert. Ist kein Symbol angegeben, liegt der relative Fehler unter 1%. Die weitere Codierung des Fehlers geschieht wie folgt: >10%:  $\times$ , >5%:  $\square$ , >2.5%:  $\diamond$  und >1%:  $-$ . Die maximal auftretende Abweichung beträgt 12.1%.

Es sei betont, daß es sich bei den dargestellten Fällen um Extrembeispiele handelt. Die entsprechenden Abweichungen für die Kontinuumsopazitäten liegen unter 5%. In allen Fällen werden die Extremwerte im Fehler bei Drücken und Temperaturen angenommen, die abseits der planparallelen Druck/Temperaturschichtung

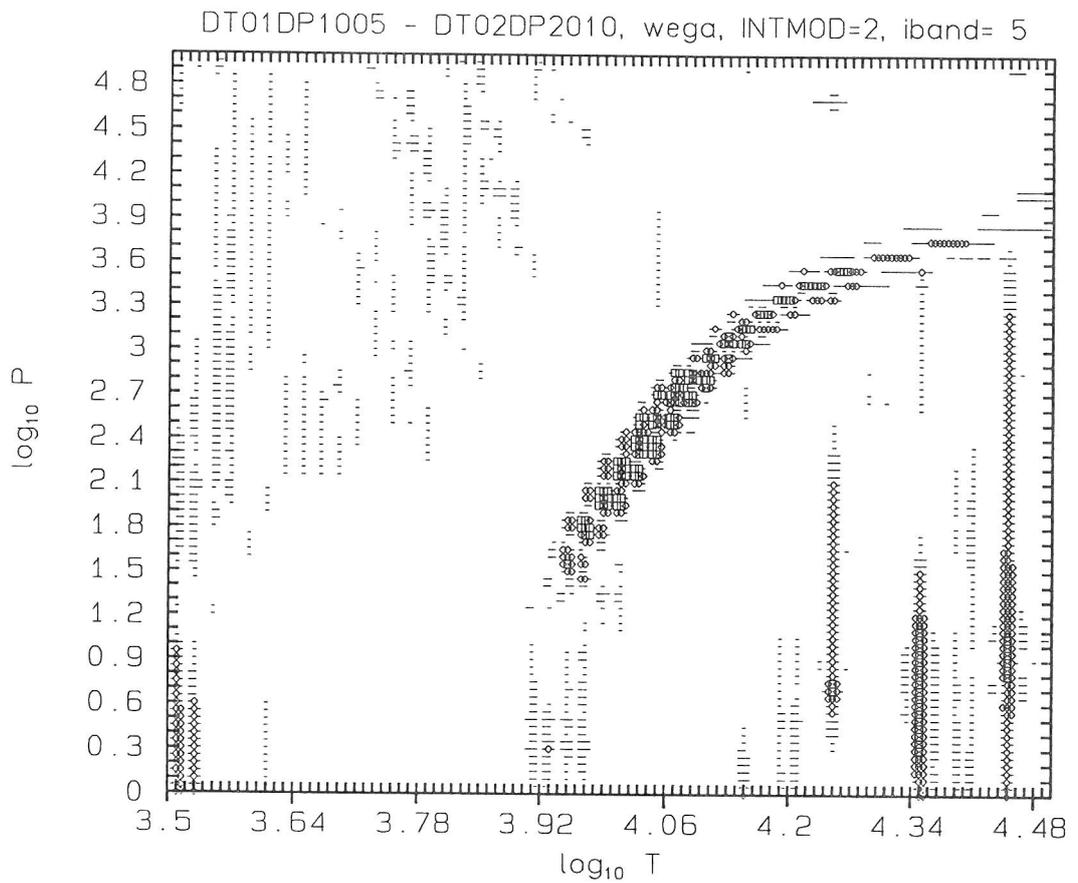


Abb. 8: Relative Abweichungen der interpolierten Opazität von der direkt berechneten in der Tabelle für den Spektraltyp A0V (Wega). Dargestellt ist in der Temperatur/Druck-Ebene der Fehler für Band 5, das die stärksten Linien repräsentiert. Der Betrag des Fehlers ist durch Symbole codiert. Ist kein Symbol angegeben, liegt der relative Fehler unter 1%. Die weitere Codierung des Fehlers geschieht wie folgt: >10%:✱, >5%:□, >2.5%:◇ und >1%:-. Die maximal auftretende Abweichung beträgt 16.9%.

aus den ATLAS6-Atmosphären für den entsprechenden Spektraltyp liegen. Insgesamt erscheint daher die so erzielte Genauigkeit bei der Wiedergabe der Opazitäten ausreichend.

Da bei der Besprechung der einzelnen Mehrbandbeschreibungen auf die Frage der Gitterauflösung nicht nochmals eingegangen werden soll, seien schon hier die verwendeten Druck/Temperaturgitter angegeben: Wie man aus Tabelle 3 ablesen

Spektraltyp	Druck		Temperatur	
	Intervallgrenzen $\lg p$	Auflösung $\Delta \lg p$	Intervallgrenzen $\lg T$	Auflösung $\Delta \lg T$
G2V (Sonne)	1.0/1.4/4.0/6.0	0.2/0.1/0.2	3.3/4.3	0.02
F5V	1.0/1.4/4.0/6.0	0.2/0.1/0.2	3.3/4.3	0.02
A0V (Wega)	0.0/1.4/4.0/5.0	0.2/0.1/0.2	3.5/4.5	0.02
DA	2.0/5.2/6.8/8.0	0.2/0.1/0.2	3.7/4.5/5.0	0.02/0.05

Tabelle 3: Druck/Temperaturgitter, auf denen Opazitäten und Quellfunktionen für die betrachteten Spektraltypen tabelliert sind. Die erste Spalte bezeichnet den Spektraltyp, die nächsten beiden beschreiben das Druckgitter, die letzten beiden das Temperaturgitter. Danach umfaßt beispielsweise das Druckgitter der Opazitätstabelle für die Sonne einen Gesamtbereich von  $\lg p = 1.0$  bis  $\lg p = 6.0$ . Er wird in drei grobe Abschnitte geteilt, deren Intervallgrenzen bei  $\lg p = 1.4$  und  $\lg p = 4.0$  liegen. Diese drei Abschnitte werden äquidistant unterteilt mit einer Auflösung von  $\Delta \lg p = 0.2$ ,  $\Delta \lg p = 0.1$  und  $\Delta \lg p = 0.2$ . Entsprechend sind die Angaben für das Temperaturgitter zu lesen.

kann, sind die Gitter der Opazitätstabellen für die Hauptreihensterne im wesentlichen identisch. Im Fall von Wega ist lediglich den dort etwas höheren Temperaturen und niedrigeren Drücken Rechnung getragen. Die Verhältnisse im Weißen Zwerg vom Spektraltyp DA verlangen die Berücksichtigung höherer Temperaturen und Drücke als bei den Hauptreihensternen. Die gewählte Gitterauflösung bestimmt entscheidend die Filegröße, die zur Speicherung einer Opazitätstabelle benötigt wird. Sie beträgt für die Hauptreihensterne etwa 130 kbyte, für den Weißen Zwerg etwa 150 kbyte, was noch leicht zu verarbeiten ist und unproblematisch im Hinblick auf Speicheranforderungen im HD-Code ist.

### 3.6 Frequenzverteilung des Strahlungsflusses am unteren Rand

Im HD-Code kann der untere Rand des Volumens, in dem die stellaren Strömungsvorgänge simuliert werden, als offen oder geschlossen betrachtet werden. Ist der Rand geschlossen, so kann ihn das Gas nicht passieren und Energie nur als Strahlung von unten in das Simulationsvolumen einströmen. Eine solcher Ansatz ist sinnvoll, wenn der untere Rand in Gebieten der Sternatmosphäre liegt, die konvektiv stabil sind. Das Wegamodell ist hierfür ein Beispiel (siehe Abb. 61). Als Randbedingung wird in diesem Fall ein fester Strahlungsstrom am Boden vorgegeben. Der Strahlungsstrom wird dort räumlich wie zeitlich als konstant angesehen. Er wird in vertikaler Richtung mit einem Betrag von  $\sigma T_{\text{eff}}^4$  eingespeist. Zur vollständigen geometrischen Charakterisierung muß die Winkelverteilung der spezifischen Intensität vorgegeben werden, die für den Fluß verantwortlich ist. Wie im planparallelen Fall nimmt man an, daß die Intensität nur vom Inklinationwinkel des Sehstrahles abhängt. Als Winkelverteilung wird die aus der Diffusionsnäherung nach Gleichung (3.34) (Seite 23) angenommen. Diese Vorgehensweise stellt eine brauchbare Beschreibung der Verhältnisse da, solange gewährleistet ist, daß der untere Rand des Simulationsvolumens in optisch dicken Bereichen der Atmosphäre liegt.

Betrachtet man nichtgrauen Strahlungstransport, tritt als weiterer Freiheitsgrad die Frequenzverteilung des Flusses, die man am Boden spezifizieren muß, hinzu. Wie

bei der Winkelverteilung wird zur Vorgabe von der Gültigkeit der Diffusionsnäherung ausgegangen. Integriert man den Fluß in Diffusionsnäherung nach Gleichung (3.39) für ein Band  $i$  über die Frequenz erhält man

$$F_{\text{rad},i} = -\frac{4\pi}{3} \int_{\text{Band}} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dz} d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\bar{\kappa}_{R,i}} \frac{dB_i}{dT} \frac{dT}{dz}. \quad (3.64)$$

Dabei ist  $B_i$  die über das Frequenzband integrierte Kirchhoff-Planck-Funktion. Wir sehen anhand Gleichung (3.64), daß der Bruchteil  $f_i$  des Gesamtflusses im Band  $i$  abhängt vom Rosselandschen Mittelwert des Absorptionskoeffizienten  $\bar{\kappa}_{R,i}$  und der Temperaturableitung der Kirchhoff-Planck-Funktion  $B_i$ .  $f_i$  ist proportional zu

$$f_i \propto \frac{1}{\bar{\kappa}_{R,i}} \frac{dB_i}{dT}. \quad (3.65)$$

Um die relativen Anteile des Flusses in den einzelnen Bändern angeben zu können, müssen beide Faktoren auf der linken Seite der Proportionalität (3.65) bekannt sein.

Im Mehrbandverfahren wird so vorgegangen, daß zu ihrer Berechnung die horizontalen Mittelwerte von Druck und Temperatur am Boden, die zum jeweiligen Zeitpunkt herrschen, verwendet werden. In großen optischen Tiefen liefern die Opazitätstabellen direkt den Rosselandschen Absorptionskoeffizienten im betrachteten Band. Die Temperaturableitung der Kirchhoff-Planck-Funktion ist selbst nicht tabelliert. Sie wird durch numerische Differentiation aus den in Abhängigkeit von  $\lg T$  tabellierten  $b_i$ -Faktoren nach Gleichung (3.5) (Seite 16) gewonnen. Für die Temperaturableitung erhält man

$$\frac{dB_i}{dT} = 4 \frac{\sigma}{\pi} T^3 \left( b_i + \frac{\lg e}{4} \frac{db_i}{d \lg T} \right), \quad (3.66)$$

wobei  $e$  die Eulersche Zahl ist. Die numerische Differentiation von  $b_i$  geschieht konsistent mit der Interpolation, die im vorangehenden Abschnitt beschrieben wurde. Als Ableitung wird die Steigung des kubischen Polynoms, das bei der Interpolation zwischen den Stützstellen angepaßt wird, benutzt. Nach der Berechnung aller Bruchteile  $f_i$  gemäß Beziehung (3.65) wird ihre Summe auf eins normiert.

## 4 Wieviele Bänder sind nötig?

Die Frage, wieviele Frequenzsätze notwendig sind, um den nichtgrauen Strahlungstransport befriedigend wiederzugeben, soll in diesem Abschnitt anhand eines Beispiels diskutiert werden. Wir konstruieren für die Sonne Mehrbandbeschreibungen mit 2, 3 und 4 Frequenzsätzen. Die erreichte Wiedergabequalität soll an den resultierenden ATLAS6-Temperaturschichtungen gemessen werden. Als Sortierverfahren wird die  $\kappa$ -Sortierung verwendet, als Opazität in den Bändern dient das jeweilige Rosseland-Mittel.

Während der Entwicklung des Mehrbandverfahrens wurde eine große Zahl ähnlicher Versuche wie der folgende unternommen, um das Verhältnis von Aufwand, der benötigten Zahl von Frequenzsätzen, zum Ergebnis, der Qualität der Temperaturschichtung, zu optimieren. Dieser Abschnitt soll exemplarisch die Vorgehensweise, die eingeschlagen wurde, dokumentieren. Die Ergebnisse stellen *nicht* den aktuellen Stand des Verfahrens dar. Dieser wird im nächsten Kapitel beschrieben.

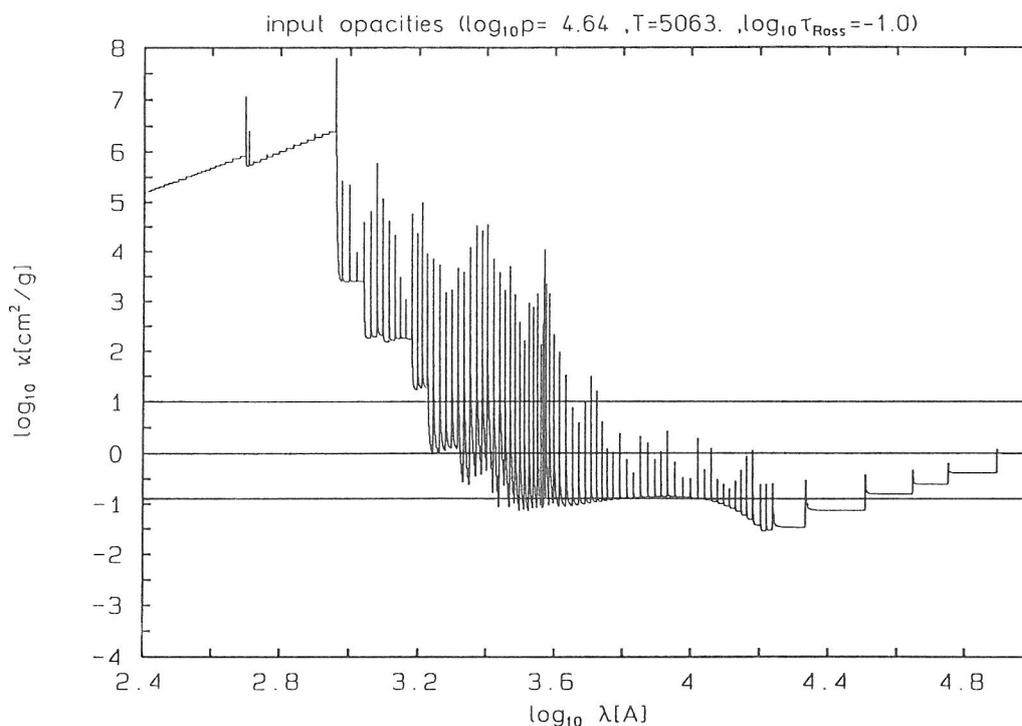


Abb. 9: Der monochromatische Absorptionskoeffizient als Funktion der Wellenlänge für einen Gasdruck von  $\lg p_g = 4.64$  und einer Temperatur von  $T = 5063$  K. Dies entspricht den Verhältnissen in der Sonnenphotosphäre bei  $\lg \tau_R = -1.0$ . Es sind zusätzlich drei waagerechte Linien eingezeichnet, die  $\lg \kappa = -0.9, 0.0$  und  $1.0$  markieren.

Abb. 9 zeigt den Verlauf des monochromatischen Absorptionskoeffizienten für thermodynamische Verhältnisse, die bei einer optischen Tiefe  $\lg \tau_R = -1.0$  in der Sonnenphotosphäre vorzufinden sind. Diese Zuordnung zwischen Druck, Temperatur und optischer Tiefe geschieht auf Grund eines planparallelen nichtgrauen ATLAS6-Modells. Der Verlauf des Absorptionskoeffizienten nach Abb. 9 dient als Grundlage für die  $\kappa$ -Sortierung. Als erster Versuch soll eine Mehrbandbeschreibung mit zwei Frequenzsätzen betrachtet werden, bei der Opazitäten  $\lg \kappa < 0.0$  in ein Band, das Kontinuumsband, die übrigen in das zweite, das Linienband, sortiert werden. Bei der Auswahl des Schwellenwertes  $0.0$  muß man berücksichtigen, daß der Hauptteil des emergenten solaren Strahlungsstroms langwellig der Balmerkante bei  $\lg \lambda / [\text{Å}] = 3.56$

fließt. Dem Verhalten des Absorptionskoeffizienten in diesem Wellenlängenbereich, in dem die gebunden-frei Absorption des  $H^-$ -Ions die Kontinuumsopazität dominiert, sollte daher besondere Beachtung geschenkt werden. Der Schwellenwert  $\lg \kappa = 0.0$  sorgt dafür, daß im wesentlichen mittelstarke und starke Linien, sowie schwache Linien und das Kontinuum durch die beiden Bändern repräsentiert sind.

Kurve 3 in Abb. 10 zeigt die resultierende ATLAS6-Temperaturschichtung. Zum Vergleich sind eingezeichnet: Kurve 1: graue Temperaturschichtung unter Verwendung von Rosseland-Opazitäten, Kurve 2: nichtgraue Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten. Diese Vergleichsschichtungen sind auch in den Abbildungen 11, 12 und 13 eingezeichnet. Die optische Tiefe  $\lg \tau_R = 0$  liegt in der nichtgrauen Schichtung bei  $\lg p = 5.1$ .

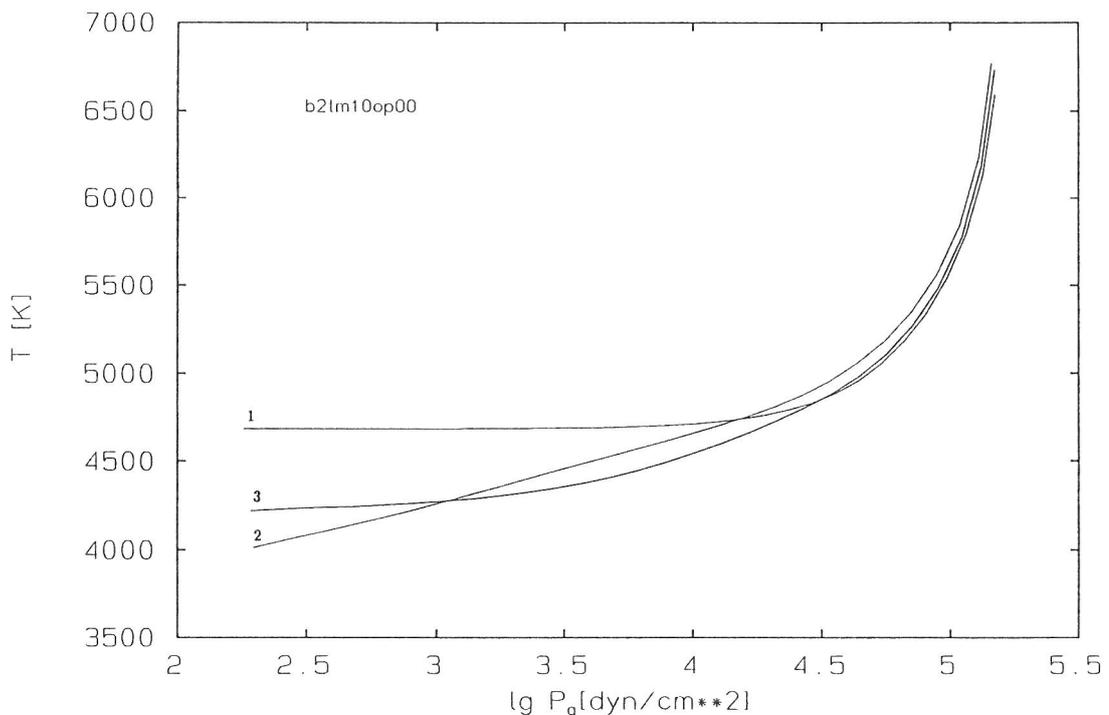


Abb. 10: Temperatur als Funktion des Gasdruckes für eine Mehrbandbeschreibung mit 2 Bändern (Kurve 3). Zum Vergleich sind eingezeichnet: Kurve 1: graue Temperaturschichtung, Kurve 2: nichtgraue Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten. Alle drei Schichtungen sind flußkonstante ATLAS6-Modelle der Sonnenphotosphäre ( $l/H_p = 1.5$ ).

Man erkennt in Abb. 10, daß bereits der Übergang von einem Frequenzpunkt (Kurve 1), was der grauen Näherung entspricht, zu zwei im Mehrbandverfahren (Kurve 3) deutliche Änderungen in der Temperaturstruktur mit sich bringt. Innen bei  $\lg p > 4.5$  erwärmt sich die Schichtung gegenüber der grauen, außen findet eine merkliche Abkühlung statt. Generell findet eine Annäherung an die nichtgraue Schichtung statt. Der photosphärische Temperaturgradient für  $\lg p < 3.5$  ist aber deutlich zu flach. Dies deutet darauf hin, daß beide Bänder in diesem Bereich schon optisch dünn sind und keine Kühlung der oberen Photosphäre durch das Linienband mehr stattfindet. Die Verwendung des Rosseland-Mittels fördert dieses Verhalten, da es betont niedrige Opazitäten in einem Band liefert. Innen ist die Aufheizung zu schwach und der Temperaturgradient etwas steiler als im nichtgrauen Fall, was darauf hindeutet, daß die wirksame Kontinuumsopazität in den tiefen Schichten etwas überschätzt wird.

Verbesserungen werden erzielt, wenn man das Kontinuumsband ( $\lg \kappa < 0.0$ ) oder das Linienband ( $\lg \kappa \geq 0.0$ ) aufteilt. Die Abb. 11 (Kurve 3) zeigt den Tem-

peraturverlauf, wenn man das Kontinuumsband teilt und als weitere Schwellentiefe  $\lg \kappa = -0.9$  einführt. Nach Abb. 9 werden nun nur Frequenzpunkte mit sehr niedrigem Absorptionskoeffizienten in das Kontinuumsband sortiert, das nächste Band enthält die verbleibenden schwachen, das dritte Band nach wie vor mittelstarke und starke Linien. Es zeigt sich erwartungsgemäß eine Verbesserung des Temperaturverlaufs in den tiefen Schichten, indem sich die Mehrbandschichtung der nichtgrauen annähert. Augenfalliger ist der Fortschritt bei einer Teilung des Linienbandes, wobei als zusätzliche Schwellentiefe gegenüber der Beschreibung durch zwei Bänder  $\lg \kappa = 1.0$  eingeführt wird, was einer Trennung von mittelstarken und starken Linien entspricht (siehe wieder Abb. 9). Die Temperaturschichtung nach Abb. 12 fällt in diesem Fall außen deutlich kühler aus. Der photosphärische Temperaturgradient entspricht nun schon ungefähr dem nichtgrauen. Innen ist keine Veränderung sichtbar.

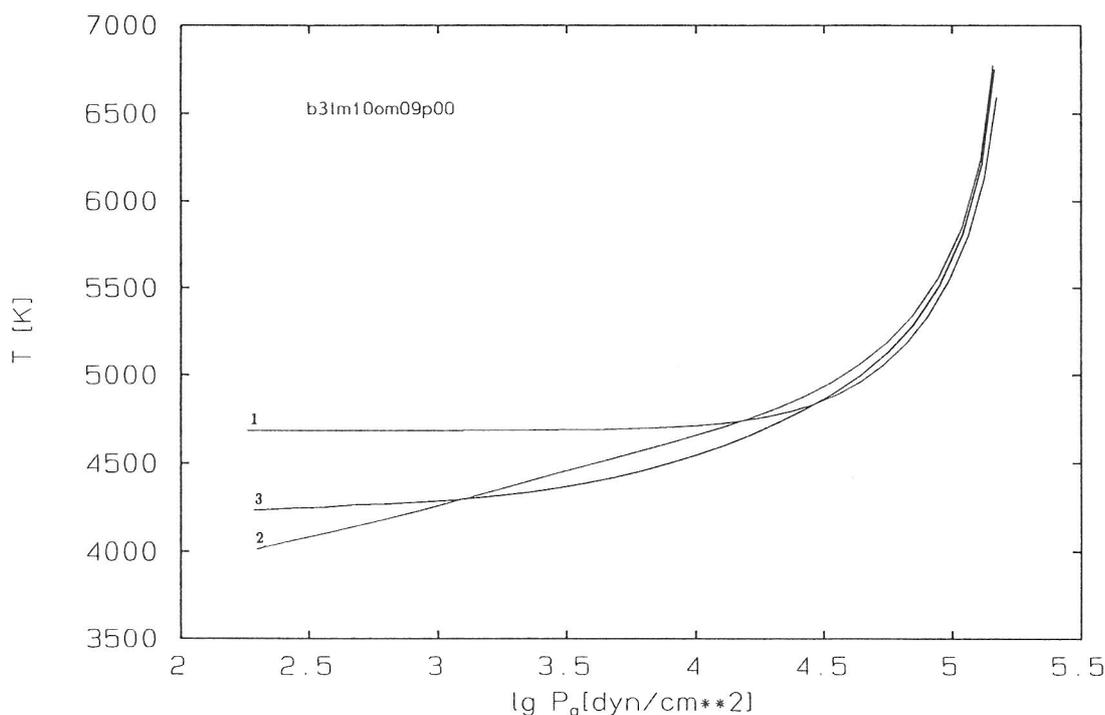
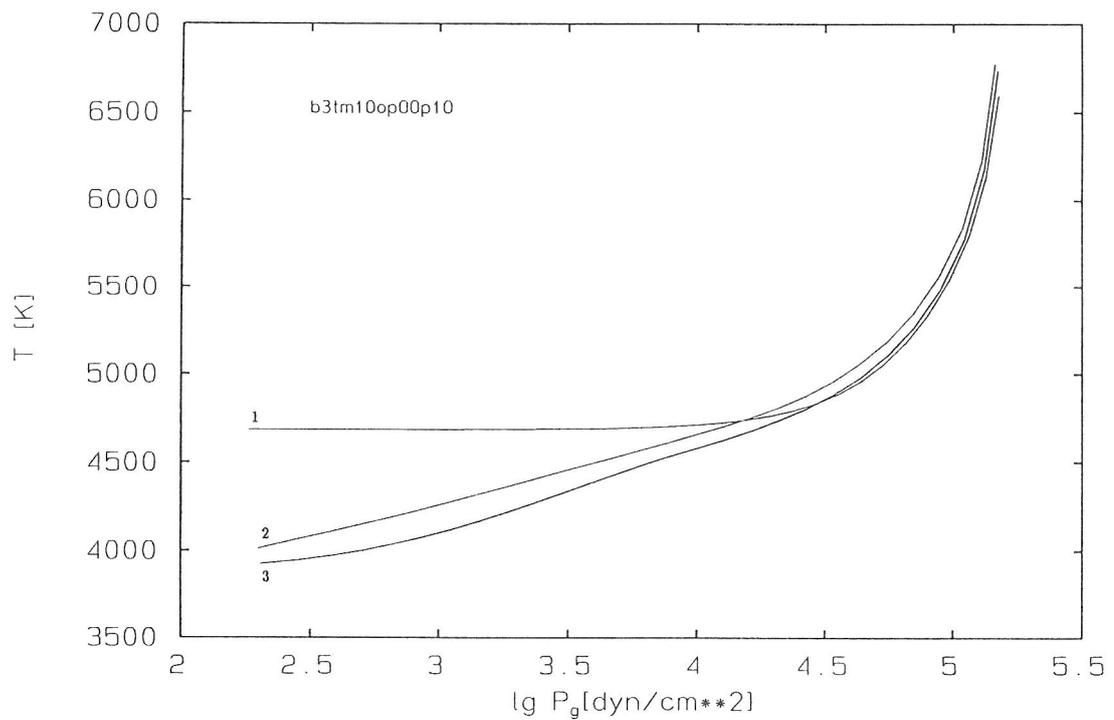
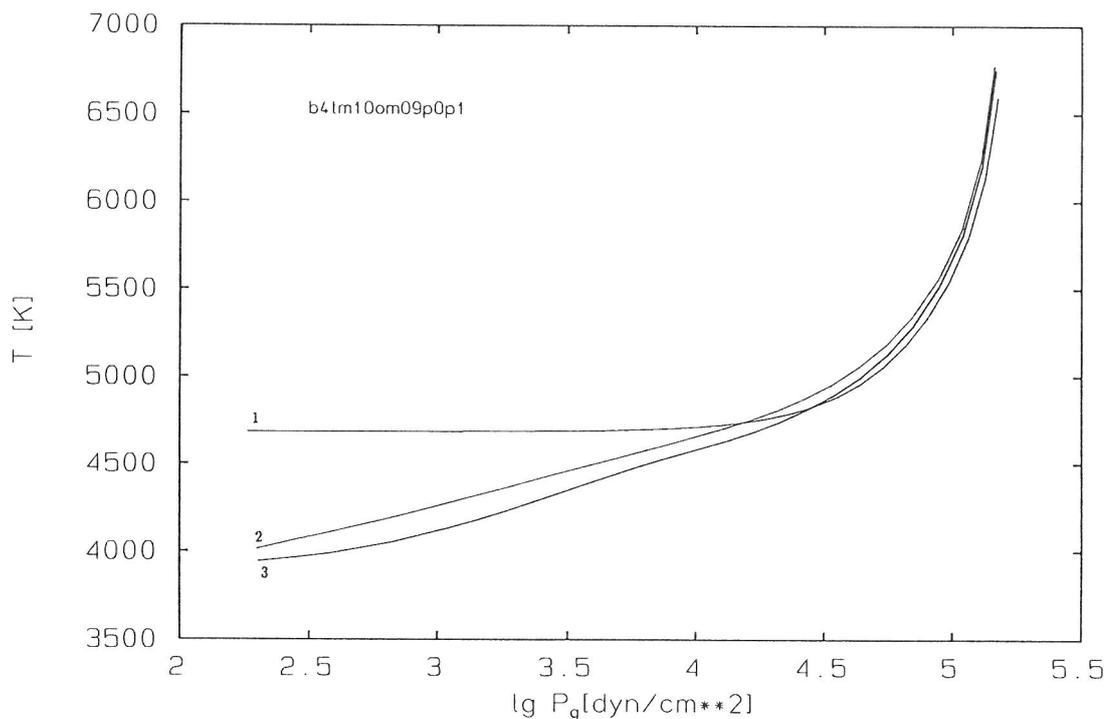


Abb. 11: Temperatur als Funktion des Gasdruckes für eine Mehrbandbeschreibung mit 3 Bändern (Kurve 3). Zum Vergleich sind eingezeichnet: Kurve 1: graue Temperaturschichtung, Kurve 2: nicht-graue Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten. Die dargestellte Temperaturschichtung ergibt sich nach *Teilung des Kontinuumsbandes* der Zweibandbeschreibung, deren Temperaturverlauf in Abb. 10 dargestellt ist.

Kombiniert man beide Teilungsvorgänge, erhält man schließlich eine Beschreibung mit 4 Bändern, deren zugehörige Temperaturschichtung nach Abb. 13 die erzielten Verbesserungen vereint. Die Temperaturabweichung zwischen nichtgrauer Schichtung und Mehrbandschichtung beträgt in diesem Fall noch maximal 150 K. Der resultierende Temperaturgradient besitzt weitgehend nichtgrauen Charakter. Durch Hinzunahme weiterer Bänder und günstigere Wahl der Schwellenwerte für die Sortierung könnte man nun weitere Verbesserungen erzielen. Wie wir sehen, ist für die in der Überschrift gestellte Frage entscheidend, welche Temperaturübereinstimmung man überhaupt erreichen will. In dieser Arbeit sollen die Effekte des nichtgrauen Strahlungstransportes in den hydrodynamischen Simulationen herausgearbeitet werden. Ein perfekter Temperaturfit ist hierfür nicht nötig. Es werden bei den im nächsten Kapitel dokumentierten Mehrbandbeschreibungen zwischen 4 und



**Abb. 12:** Temperatur als Funktion des Gasdruckes für eine Mehrbandbeschreibung mit 3 Bändern (Kurve 3). Zum Vergleich sind eingezeichnet: Kurve 1: graue Temperaturschichtung, Kurve 2: nicht-graue Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten. Die dargestellte Temperaturschichtung ergibt sich nach *Teilung des Linienbandes* der Zweibandbeschreibung, deren Temperaturverlauf in Abb. 10 dargestellt ist.



**Abb. 13:** Temperatur als Funktion des Gasdruckes für eine Mehrbandbeschreibung mit 4 Bändern (Kurve 3). Zum Vergleich sind eingezeichnet: Kurve 1: graue Temperaturschichtung, Kurve 2: nicht-graue Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten. Die dargestellte Temperaturschichtung ergibt sich nach *Teilung des Linien- und Kontinuumsbandes* der Zweibandbeschreibung, deren Temperaturverlauf in Abb. 10 dargestellt ist.

6 Bändern verwendet. Sie geben den nichtgrauen Temperaturverlauf stets in guter Näherung wieder.

## 5 Anwendung des Mehrbandverfahrens

In diesem Kapitel werden diejenigen Opazitätstabellen vorgestellt, die für die hydrodynamische Simulationen im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden. Sie repräsentieren den aktuellen Stand des Mehrbandverfahrens. In allen Fällen werden hybride Tabellen benutzt, in denen Planck- und Rosseland-Mittel gemischt auftreten.

### 5.1 Spektraltyp G2V (Sonne)

Die Mehrbandbeschreibung für die Sonne ( $T_{\text{eff}} = 5770 \text{ K}$ ,  $\lg g = 4.44$ ) erfolgt mit Hilfe von 5 Frequenzsätzen. Die Sortierung der Frequenzpunkte geschieht nach dem Schema der  $\tau$ -Sortierung. Es wird eine äquidistante Staffelung der  $\tau$ -Schwellenwerte von 1.5 dex zugrundegelegt. Als Referenzatmosphäre dient die nichtgraue Temperaturschichtung nach Abb. 14, Kurve 2. Die Intervallgrenzen liegen bei  $\tau_{\text{R}} = 0.0$ ,  $-1.5$ ,  $-3.0$ ,  $-4.5$ . Abb. 14 zeigt die Temperaturschichtung (Kurve 3), die aus der

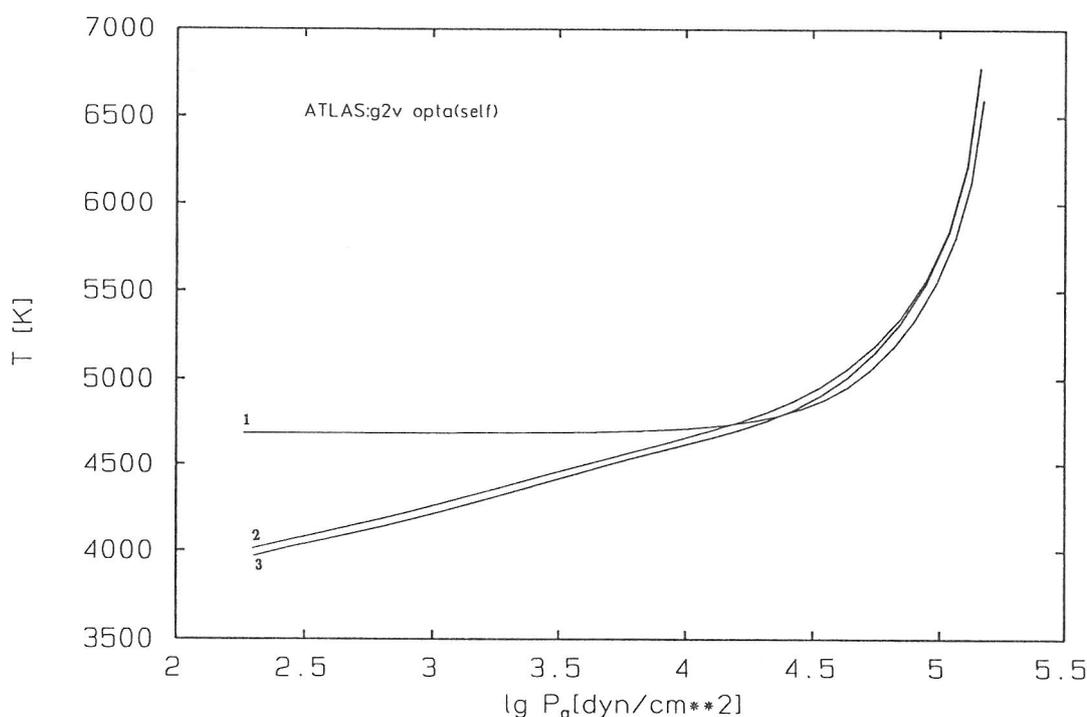


Abb. 14: ATLAS6 Temperaturschichtungen für die Sonnenatmosphäre ( $T_{\text{eff}} = 5770 \text{ K}$ ,  $\lg g = 4.44$ ). Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten, Kurve 3: Mehrbandbeschreibung mit 5 Frequenzpunkten. Die Temperaturschichtung aufgrund der Mehrbandbeschreibung ist maximal 60 K kühler als die nichtgraue.

solaren Opazitätstabelle resultiert, wie immer im Vergleich mit der entsprechenden grauen (Kurve 1) und nichtgrauen (Kurve 2). Danach erzielt man in großen Tiefen mit  $\lg p > 5$  eine perfekte Übereinstimmung mit der nichtgrauen Schichtung. Die optische Tiefe  $\tau_{\text{R}} = 1$  liegt in der solaren Atmosphäre bei  $\lg p = 5.1$ . Beim Übergang in die optisch dünnen Gebiete wird die Mehrbandschichtung kühler als die nichtgraue. Die maximale Abweichung wird bei  $\lg p \approx 4.4$  erreicht und beträgt 60 K. Die optische Tiefe am oberen Rand der Atmosphäre bei  $\lg p = 2.3$  beträgt  $\lg \tau_{\text{R}} \approx -5$ . Der photosphärische Temperaturgradient wird bis in diese geringen optischen Tiefen durch die Mehrbandbeschreibung sehr gut erfaßt. Insgesamt liefert die Mehrbandbeschreibung gegenüber der grauen Näherung eine wesentlich verbesserte Wiedergabe der Temperaturschichtung.

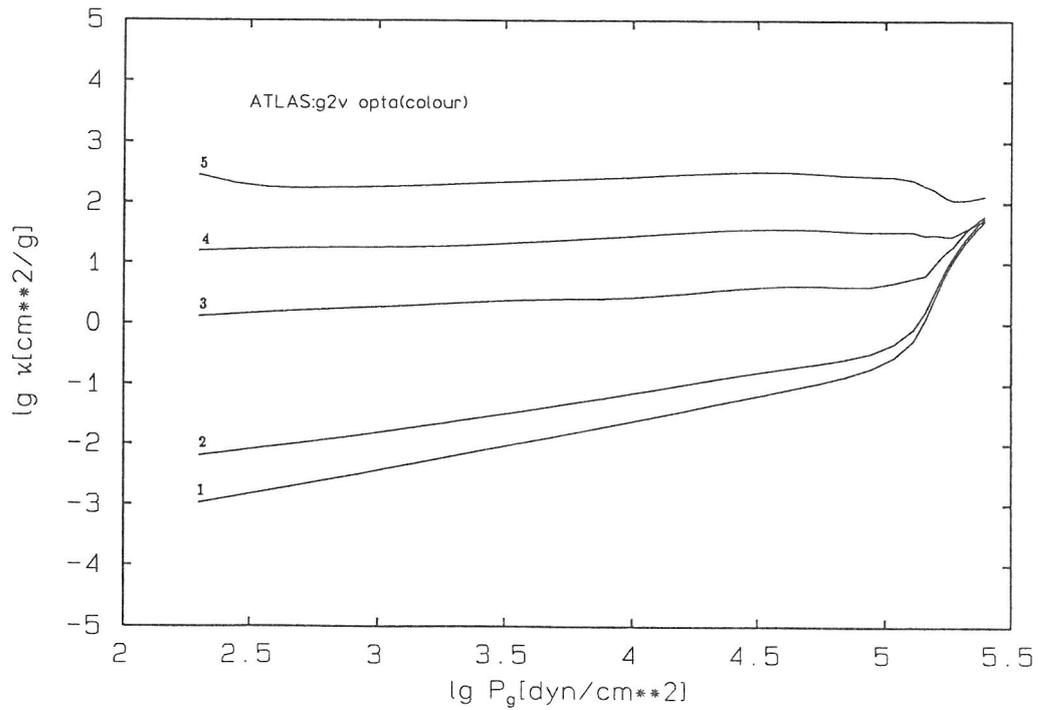


Abb. 15: Massenabsorptionskoeffizient als Funktion des Gasdruckes für die fünf Frequenzsätze der solaren Opazitätstabelle. Aufgetragen ist der Verlauf in der nichtgrauen solaren Druck/Temperaturschichtung, die in Abb. 14 als Kurve 2 eingezeichnet ist.

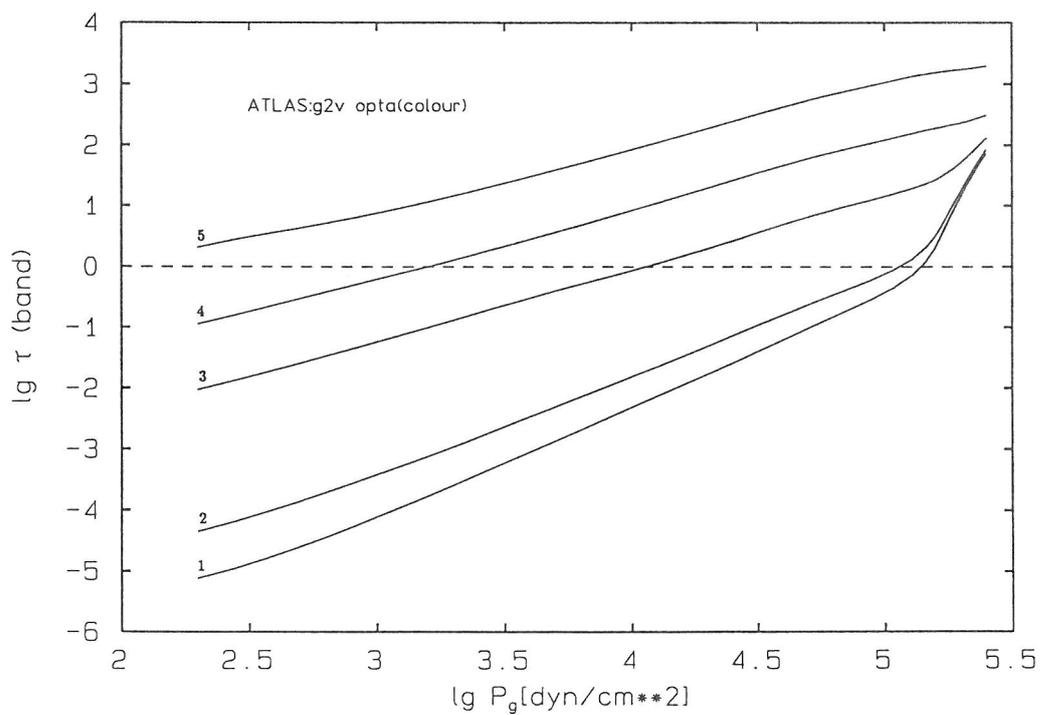


Abb. 16: Optische Tiefe als Funktion des Gasdruckes für die fünf Frequenzsätze der solaren Opazitätstabelle. Aufgetragen ist der Verlauf in der nichtgrauen solaren Druck/Temperaturschichtung, die in Abb. 14 als Kurve 2 eingezeichnet ist.

Abb. 15 zeigt den Verlauf des Absorptionskoeffizienten für die fünf Bänder der solaren Opazitätstabelle in der nichtgrauen solaren Druck/Temperaturschichtung, die in Abb. 14 als Kurve 2 eingezeichnet ist. Abb. 16 ist die entsprechende Abbildung für die optischen Tiefen. Die Bänder sind nach steigender Opazität von 1 bis 5 durchnummeriert. Im photosphärischen Bereich  $\lg p < 5.1$  ( $\tau_R < 1$ ) besitzen die Opazitäten nach Abb. 15 einen gleichmäßigen Verlauf und die einzelnen Kurven schneiden sich nicht. Dasselbe gilt für die optischen Skalen. Die feste Zuordnung zwischen Band und Opazität bedeutet, daß hier die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Frequenz in allen Tiefen ähnlich ist. Es liegen also für die Anwendung des Mehrbandverfahrens günstige Verhältnisse vor. Weiterhin zeigt sich, daß die Staffelung der  $\tau$ -Schwellenwerte nicht zu grob ist, da die Umschaltung von Planck- auf Rosseland-Mittel, die für jedes Band<sup>12</sup> bei  $\lg \tau_R = -0.46$  ( $\tau_R = 0.35$ ) geschieht, im Kurvenverlauf nicht auffällt. Nur bei Band 5 erkennt man für die äußersten atmosphärischen Schichten ein merkliches Ansteigen des Absorptionskoeffizienten. In allen übrigen Bänder unterscheiden sich die beiden Mittelwerte nicht so stark, daß ein ähnlicher Anstieg bemerkbar wäre.

In den subphotosphärischen Schichten  $\lg p > 5.1$  ändert sich das Bild einschneidend. Die einsetzende Ionisation des Wasserstoffs führt zu systematischen Änderungen im Verhalten des Absorptionskoeffizienten mit der Frequenz. Die Zuordnung zwischen Band und Größe des Absorptionskoeffizienten wird zerstört. Am unteren Rand ( $\lg p = 5.4$ ,  $\tau_R \approx 80$ ) besitzen die Bänder 1 bis 4 schon annähernd die gleiche Opazität. D.h. in den Bändern werden Frequenzpunkte mit stark unterschiedlichem Absorptionskoeffizienten zufällig vermischt. Man erhält damit weitgehend Verhältnisse, die der grauen Näherung entsprechen. Diese Gegebenheiten sollen nochmal anhand des detaillierten Frequenzverlaufs des Absorptionskoeffizienten im nichtgrauen Fall und für die solare Opazitätstabelle dargestellt werden. Zugleich sollen die folgenden Bilder einen Eindruck von der Qualität der Wiedergabe der tatsächlichen Verhältnisse durch das Mehrbandverfahren vermitteln.

Abb. 17 zeigt die Abhängigkeit des nichtgrauen Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge. Bei der Berechnung der nichtgrauen Temperaturschichtung nach Abb. 14 (Kurve 2) mit ATLAS6 wird dieser voll berücksichtigt. Ausgewählt sind thermodynamische Verhältnisse, die einem Ort in der höheren Photosphäre bei  $\lg \tau_R = -3.0$  der nichtgrauen Schichtung entsprechen. Zum Vergleich zeigt Abb. 18 den Verlauf des Absorptionskoeffizienten, wie ihn die solare Mehrbandbeschreibung mit fünf Bändern liefert. Im Hinblick auf die Darstellung ist zu betonen, daß die Opazitätstabellen die mittleren Absorptionskoeffizienten nur für jeden Frequenzsatz und nicht für jede Frequenz, wie es Abb. 18 suggerieren könnte, beinhalten. Es liegt aber die Information vor, welchem Frequenzsatz ein bestimmter Frequenzpunkt zugeordnet wird. Dies wird für die Abb. 18 ausgenutzt, indem für eine bestimmte Frequenz festgestellt wird, welchem Frequenzsatz sie angehört, und dann die Opazität in diesem Band aufgetragen wird. Das Ganze ermöglicht einen anschaulichen Vergleich, wie der Verlauf des Absorptionskoeffizienten in beiden Formulierungen modelliert wird.

Beim Vergleich der Abbildungen 17 und 18 ist zu berücksichtigen, daß der gesamte Spektralbereich, der in ATLAS6 bei der Berechnung des Strahlungstransportes verwendet wird, dargestellt ist. In der Atmosphäre der Sonne ist nicht der ganze Bereich von gleichem Interesse. Die Gebiete kurzwellig der Lymankante ( $\lg \lambda < 2.96$ )

<sup>12</sup>Nach Abb. 16 könnte der Eindruck entstehen, daß das Band 5 gar nicht optisch dünn wird. Hierbei müs man aber bedenken, daß in der Abbildung nicht die Rosselandtiefe aufgetragen ist, die für die Tiefenschätzung maßgeblich ist.

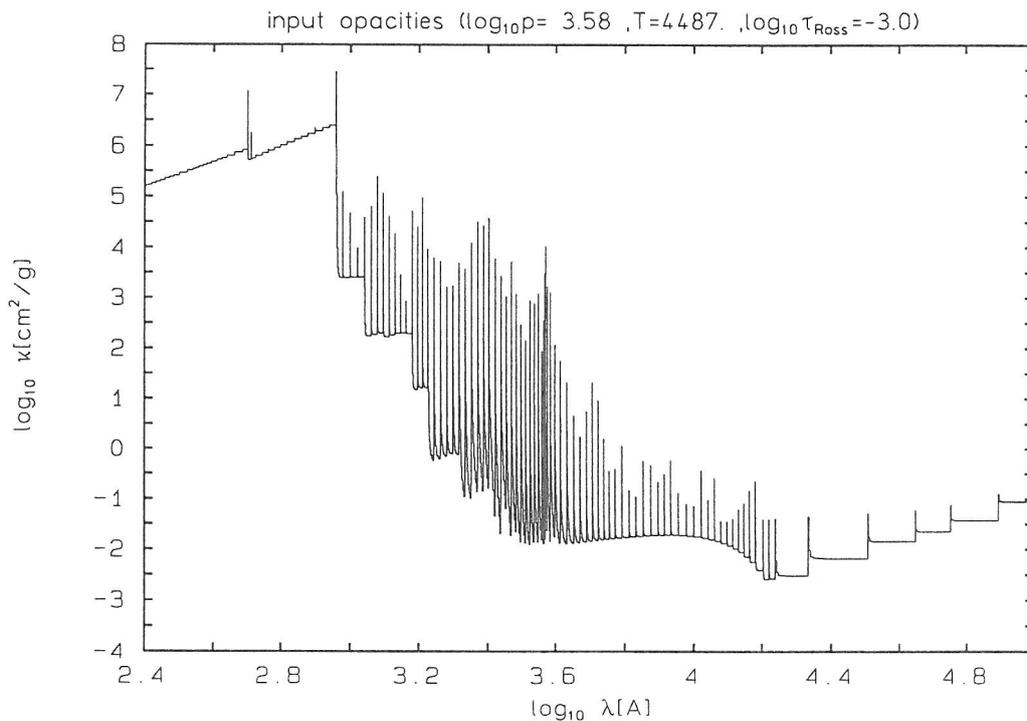


Abb. 17: Nichtgrauer Absorptionskoeffizient für  $\lg p = 3.58$  und  $T = 4487$  K. Dies entspricht den Verhältnissen in der nichtgrauen ATLAS6 Modellatmosphäre (Abb. 14, Kurve 2) in einer optischen Tiefe  $\lg \tau_R = -3.0$ .

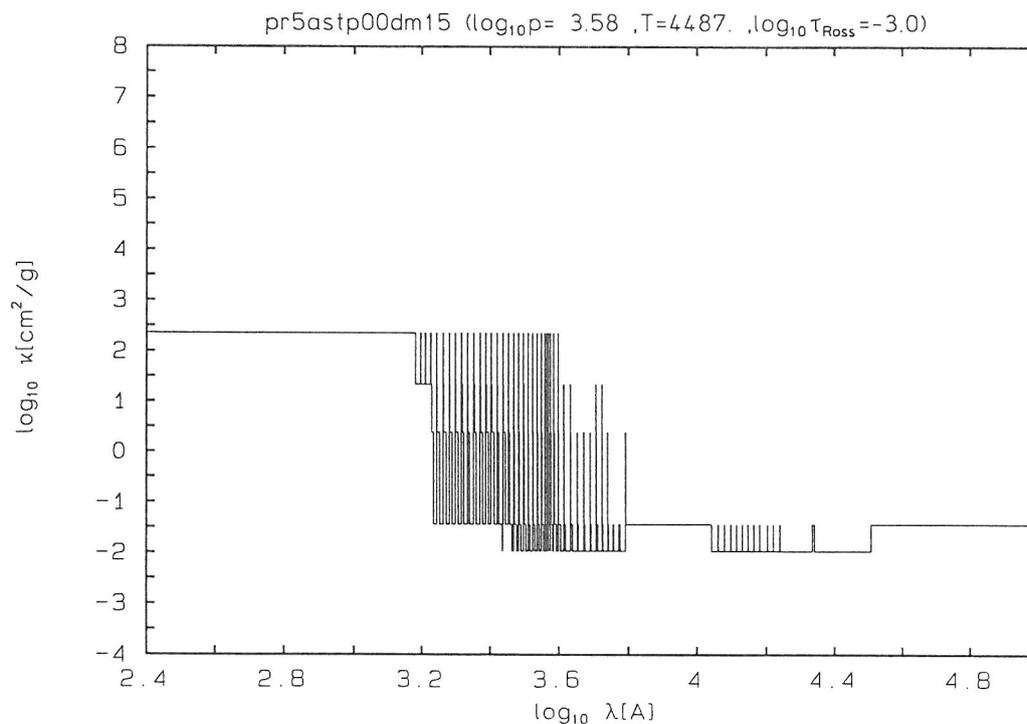


Abb. 18: Absorptionskoeffizient gemäß der solaren Opazitätstabelle mit 5 Bändern für thermodynamische Bedingungen wie in Abb. 17. Man beachte die deutlich erkennbaren 5 Opazitätsniveaus, die zur Modellierung der komplexen Frequenzabhängigkeit des nichtgrauen Absorptionskoeffizienten nach Abb. 17 herangezogen werden.

und im fernen Infrarot sind für den Energietransport irrelevant. Sie gehen bei der Mittelwertbildung (Planck- oder Rosselandmittel) nur mit geringem Gewicht ein und erscheinen in Abb. 18 als Bereiche mit konstantem Absorptionskoeffizienten. Für das Planck-Mittel soll dies Abb. 19 verdeutlichen, die die Kirchhoff-Planck-Funktion  $B_\lambda$  für verschiedene Temperaturen in Abhängigkeit der Wellenlänge zeigt. Nimmt man für die Sonne als charakteristische Temperatur in der Photosphäre die Effektivtemperatur von  $T_{\text{eff}} = 5770$  K an, erkennt man, daß Spektralbereiche außerhalb des in Abb. 19 dargestellten Wellenlängenintervalls vernachlässigbar sind.

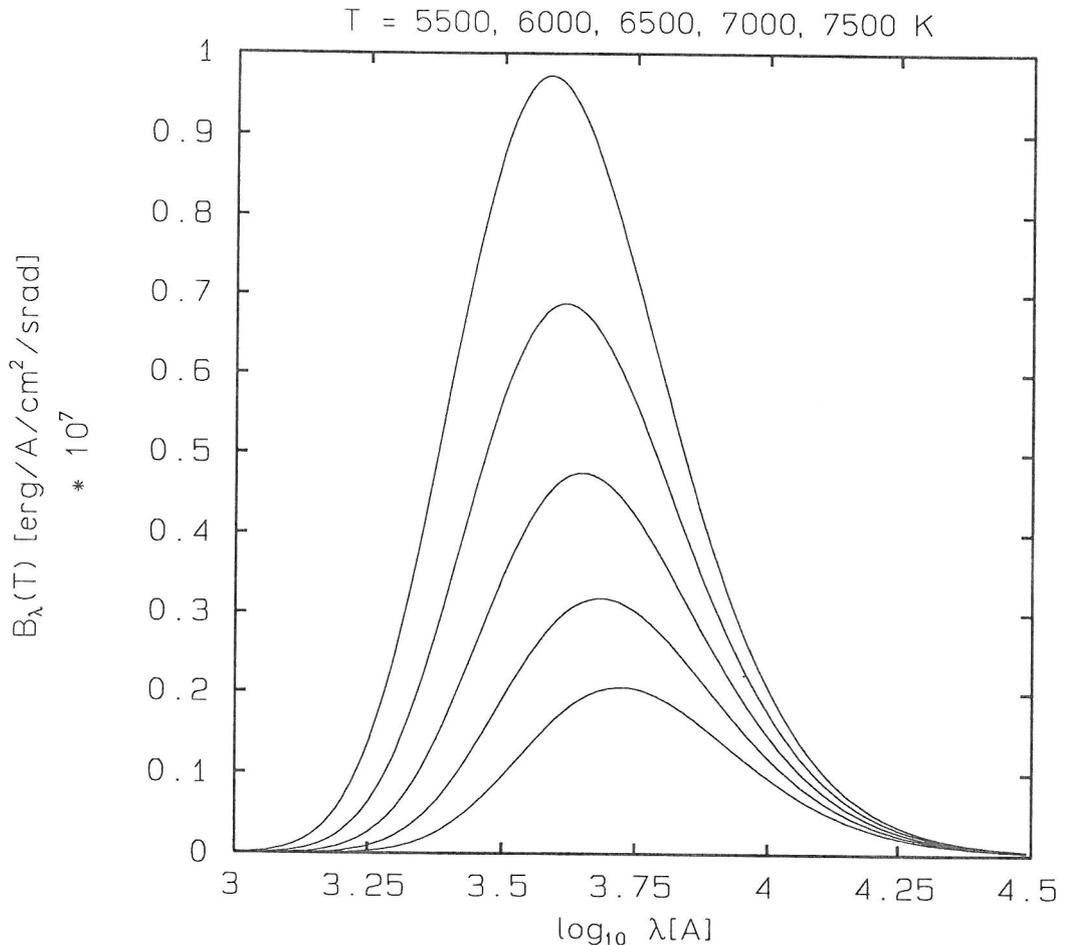


Abb. 19: Kirchhoff-Planck-Funktion  $B_\lambda$  als Funktion der Wellenlänge für verschiedene Temperaturen. Die eingezeichneten Kurven entsprechen von unten nach oben Temperaturen von 5500 K, 6000 K, 6500 K, 7000 K und 7500 K.

In Abb. 18 sind deutlich fünf Opazitätsniveaus zu erkennen, die den fünf Bandmittelwerten entsprechen. Weiterhin sieht man, wie das Kontinuumsband, das durch das niedrigste Opazitätsniveau in Abb. 18 repräsentiert wird, die Bereiche mit minimalem Absorptionskoeffizienten in Abb. 17 um  $\lg \lambda \approx 4.2$  und  $\lg \lambda \approx 3.5$  wiedergibt. Ferner ist zu erkennen, wie der „Linienwald“ durch die Bänder 2, 3, 4 und 5 modelliert wird. Band 2 hat ferner einen Anteil bei der Wiedergabe des Verlaufs der  $H^-$  gebunden-frei Absorption. Deutlich sichtbar ist, daß alle „Bänder“ nicht einfach zusammenhängend sind. Insgesamt wird der Variation des Absorptionskoeffizienten über mehrere Größenordnungen zufriedenstellend Rechnung getragen.

Die Abbildungen 20 und 21, sowie 22 und 23 geben die Verhältnisse analog zu den Abbildungen 17 und 18 bei  $\lg \tau_R = 0.0$  bzw.  $\lg \tau_R = 2.0$  wieder. In der optischen Tiefe  $\lg \tau_R = 0.0$  wird das Verhalten des Absorptionskoeffizienten noch realistisch

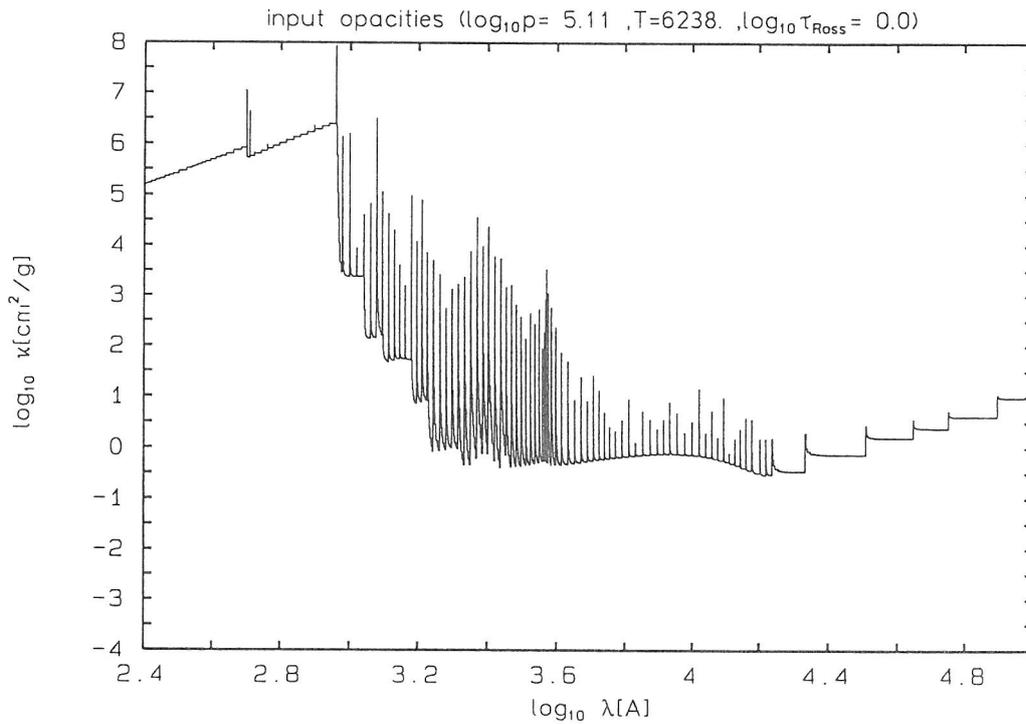


Abb. 20: Nichtgrauer Absorptionskoeffizient für  $\lg p = 5.11$  und  $T = 6238$  K. Dies entspricht den Verhältnissen in der nichtgrauen ATLAS6 Modellatmosphäre (Abb. 14, Kurve 2) in einer optischen Tiefe  $\lg \tau_R = 0.0$ .

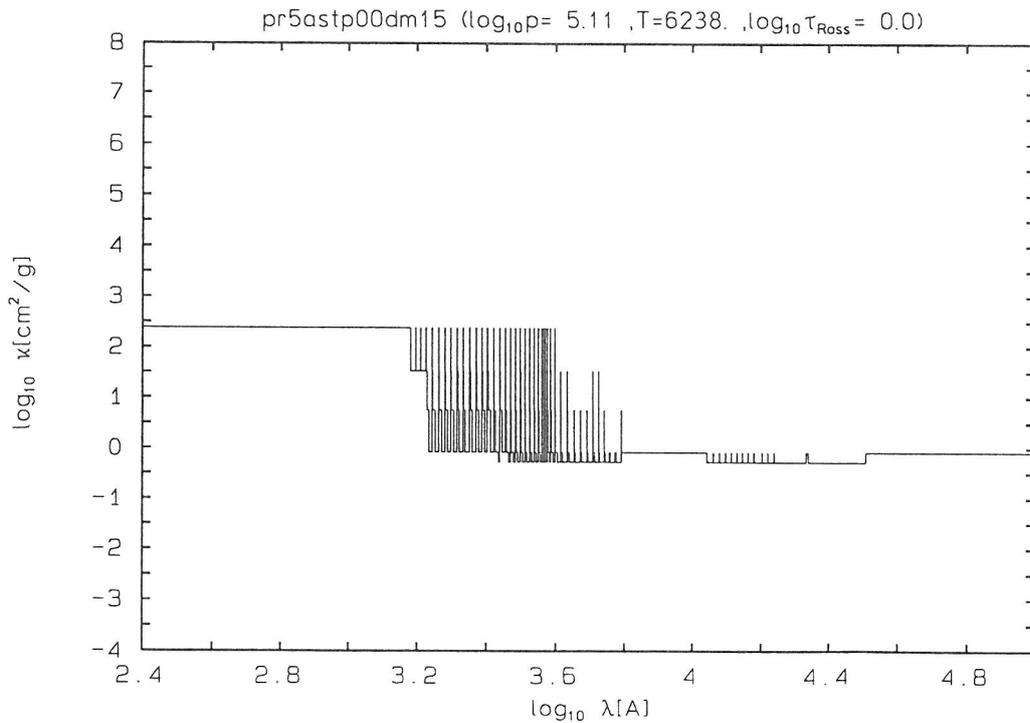
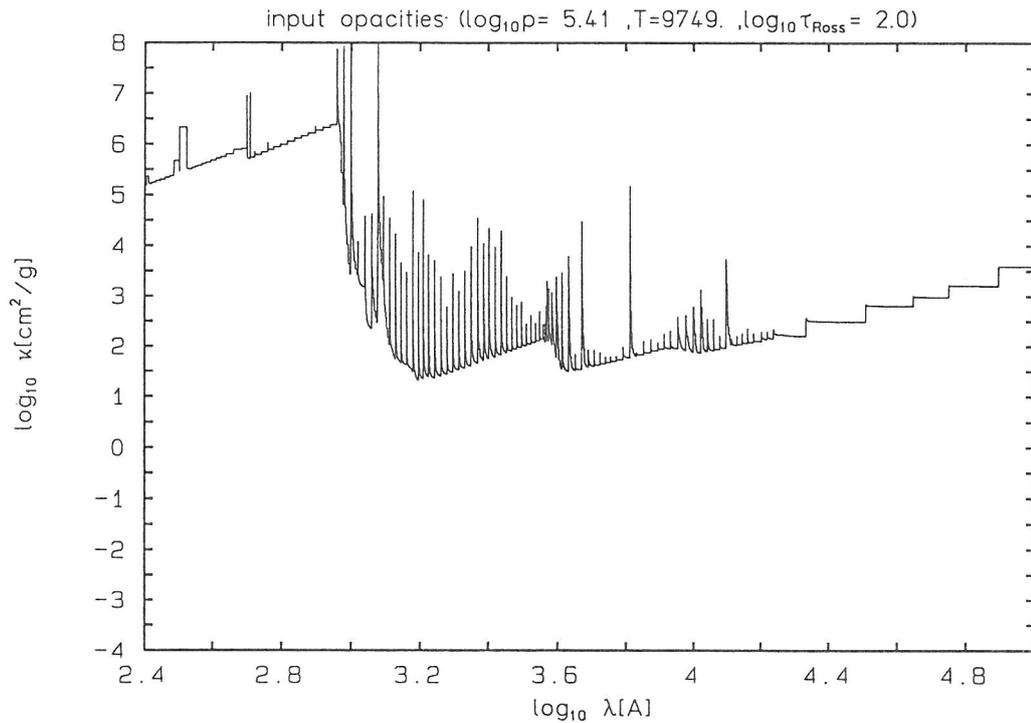
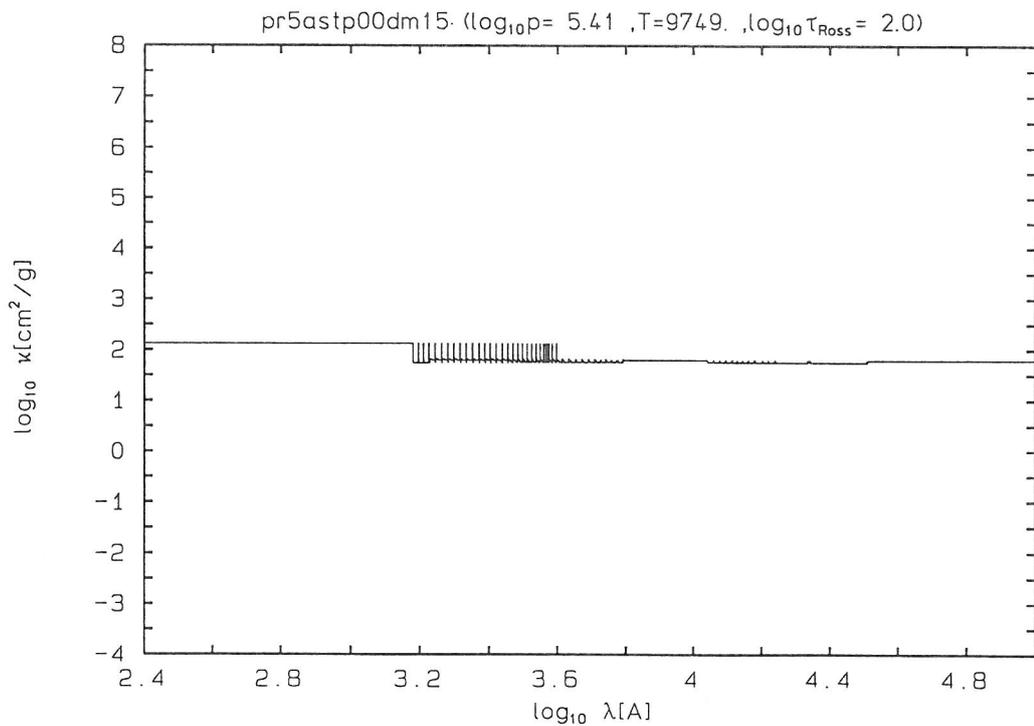


Abb. 21: Absorptionskoeffizient gemäß der solaren Opazitätstabelle mit 5 Bändern für thermodynamische Bedingungen wie in Abb. 20.



**Abb. 22:** Nichtgrauer Absorptionskoeffizient für  $\lg p = 5.41$  und  $T = 9749$  K. Dies entspricht den Verhältnissen in der nichtgrauen ATLAS6 Modellatmosphäre (Abb. 14, Kurve 2) in einer optischen Tiefe  $\lg \tau_{\text{R}} = 2.0$ .



**Abb. 23:** Absorptionskoeffizient gemäß der solaren Opazitätstabelle mit 5 Bändern für thermodynamische Bedingungen wie in Abb. 22.

erfaßt, während dies bei  $\lg \tau_R = 2.0$  nicht mehr der Fall ist. Wie schon in der Besprechung von Abb. 15 bemerkt, ändert sich in den subphotosphärischen Schichten der Verlauf des Absorptionskoeffizienten drastisch. So zeigt sich in Abb. 22, daß die Kontinuumsopazität nicht mehr durch die  $H^-$ -Opazität dominiert wird, sondern nun die gebunden-frei Absorption des HI diese Rolle übernimmt, was im typischen, sägezahnförmigen Verlauf der Kontinuumsabsorption zum Ausdruck kommt. Auch die Gegebenheiten bei der Linienabsorption ändern sich entscheidend. Z.B. treten die Balmerlinien stark in Erscheinung, was im photosphärischen Gebiet nicht der Fall ist. Auf Grund dessen ist etwa die Frequenz, an der  $H_\alpha$  ( $\lg \lambda = 3.82$ ) liegt, dem Band 2 zugeordnet. In diesem Sinne wird  $H_\alpha$  zu den schwachen Linien gezählt, was in den subphotosphärischen Bereichen eine Fehleinschätzung ist. Die Mischung von großen und kleinen Opazitäten in einem Band führt nun zu einer Nivellierung der Bandmittelwerte, wie sie in Abb. 23 zu sehen ist. Der Variation des Absorptionskoeffizienten wird nicht mehr Rechnung getragen und man erhält in der Mehrbandbeschreibung praktisch graue Bedingungen. Glücklicherweise geschieht dies aber erst in großen optischen Tiefen, wo zur Wiedergabe des Strahlungsaustausches ein graues Rosseland-Mittel ausreicht.

In Abb. 24 ist der Strahlungsaustausch dargestellt, wie er sich mit Hilfe der 5-Band Opazitätstabelle und bei nichtgrauer Beschreibung ergibt. Die Berechnung des Strahlungstransportes erfolgt hierbei in einer festgehaltenen Atmosphärenschichtung. Verwendet wird die nichtgraue Atmosphäre nach Abb. 14, Kurve 2. Dargestellt ist die Größe

$$R_{\text{rad}} = \frac{4\pi \int_{\text{Band}} \kappa_\nu (J_\nu - B_\nu) d\nu}{c_p} . \quad (5.1)$$

$\kappa_\nu$  ist der Massenabsorptionskoeffizient,  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck pro Masseneinheit. Nur aus Gründen der Anschaulichkeit wird nicht der Energieaustausch durch Strahlung selbst sondern die obige Heizrate  $R$ , mit der sich die Temperatur eines Massenelementes pro Zeiteinheit bei festgehaltenem Druck ändern würde, dargestellt. Die Heizraten, die die Mehrbandbeschreibung liefert, sind als durchgezogene Kurven eingetragen, die korrespondierenden Raten bei nichtgrauem Strahlungstransport als gestrichelte. Zur besseren Unterscheidbarkeit sind die Kurven unterschiedlich dick ausgeführt. Kurve 0 entspricht der Summe über alle Bänder.

Für  $\lg p > 5$  werden die Heizraten für die Bänder 1 und 2 sehr negativ, d.h. die Divergenz der radiativen Flüsse sehr groß. In diesen Schichten geschieht der Übergang vom konvektiven zum radiativen Energietransport. In der Photosphäre ist die Atmosphäre konvektiv stabil. Die Energie wird vollständig durch Strahlung transportiert. Da es sich bei den ATLAS6 Modellatmosphären um flußkonstante Schichtungen handelt, muß die Divergenz des Gesamtflusses verschwinden und Strahlungsgleichgewicht vorliegen. Die gestrichelte dicke Linie, die den nichtgrauen Gesamtfluß (Nummer 0) wiedergibt, zeigt entsprechend eine Heizrate null. Die größten Fehler bei der Wiedergabe des Strahlungsaustausches im photosphärischen Bereich zeigen sich in den Bändern 1 und 2. Die Linienbänder 3, 4 und 5 zeigen hingegen gute Übereinstimmung. Insgesamt ist die Heizrate, die die Mehrbandbeschreibung produziert, zu klein. Dies führt gegenüber der nichtgrauen Schichtung, in der hier der Strahlungstransport gerechnet ist, zu einer Abkühlung. Die Schichtung kühlt so weit ab, bis Strahlungsgleichgewicht im Schema der Mehrbandbeschreibung erreicht wird. Nach Abb. 14 ist dies erzielt, sobald die Temperatur der Schichtung 2 auf die der Schichtung 3 verringert ist. Schließlich sei bemerkt, daß das unstetige Verhalten der Heizraten am oberen Rand der Atmosphäre ein Artefakt der Formulierung des Strahlungstransportes im ATLAS6-Code ist.

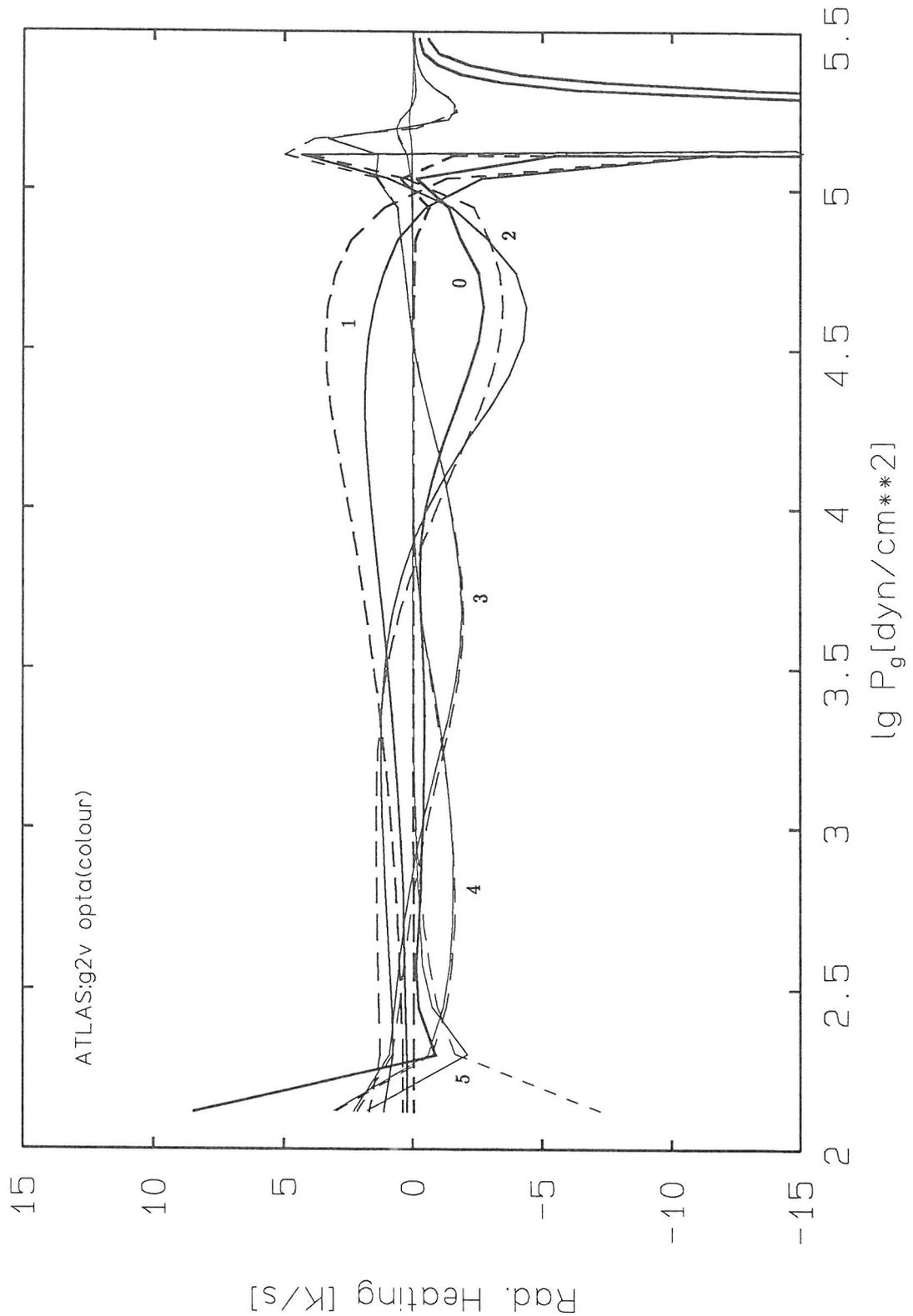


Abb. 24: Strahlungsaustausch für die fünf Frequenzsätze der solaren Opazitätstabelle in der nicht-grauen Atmosphärenschichtung nach Abb. 14, Kurve 2. Die Frequenzsätze sind von 1 bis 5 nummeriert. Nummer 0 bezeichnet die Summe. Jeder Frequenzsatz ist mit einer durchgezogenen und einer gestrichelten Linie gleicher Stärke vertreten. Die durchgezogenen Linien entsprechen dem Ergebnis bei Verwendung des Mehrbandverfahrens, die gestrichelten detailliert nichtgrauem Strahlungstransport mit 1220 Frequenzpunkten.

Zum Abschluß sei noch kurz eine weitere ältere Mehrbandbeschreibung für die Sonne präsentiert. Sie besitzt nicht die gleiche Qualität, wie das oben beschriebene Verfahren mit 5 Bändern und ist anfänglich für einige Testrechnungen benutzt worden. Es ist eine Mehrbandbeschreibung mit Hilfe von 4 Frequenzsätzen, in denen für die Opazität rein Rosselandsche Mittelwerte benutzt werden. Die Sortierung erfolgt gemäß der  $\tau$ -Sortierung, wobei als Schwellentiefen  $\tau_R = -0.5, -1.5$  und  $-2.5$  dienen. Abb. 25 zeigt die resultierende flußkonstante ATLAS6-Schichtung im Vergleich zu der grauen bzw. nichtgrauen solaren Schichtung aus den vorangegangenen Abbildungen.

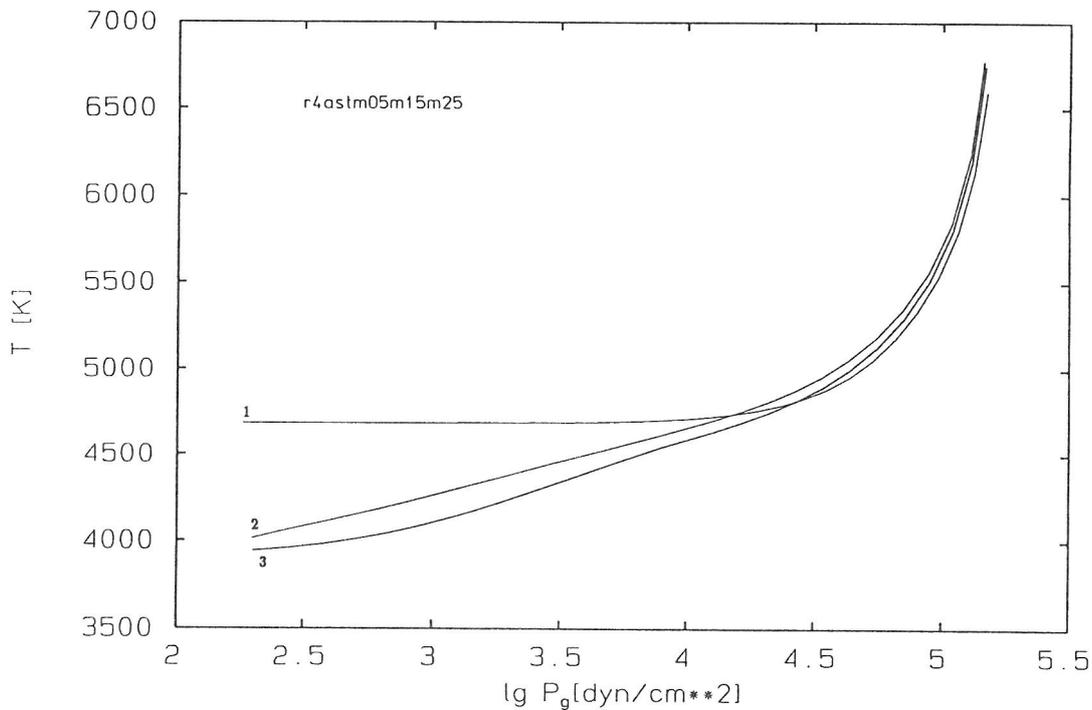


Abb. 25: ATLAS6 Temperaturschichtungen für die Sonnenatmosphäre ( $T_{\text{eff}} = 5770$  K,  $\lg g = 4.44$ ). Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten, Kurve 3: Ältere Mehrbandbeschreibung basierend auf 4 Frequenzpunkten mit reiner Rosseland-Mittelung.

## 5.2 Spektraltyp F5V

Die Mehrbandbeschreibung für Atmosphären vom Spektraltyp F5V ( $T_{\text{eff}} = 6500$  K,  $\lg g = 4.44$ ) ist analog zu der der Sonne aufgebaut. Da die Verhältnisse ganz ähnlich gelagert sind, ist ihre Darstellung knapper als im solaren Fall gehalten.

Die F5V-Mehrbandbeschreibung erfolgt mit Hilfe von 5 Frequenzsätzen. Die Sortierung geschieht nach dem Schema der  $\tau$ -Sortierung. Es wird eine äquidistante Staffelung der  $\tau$ -Schwellenwerte von 1.5 dex zugrundegelegt. Als Referenzatmosphäre, anhand der die Sortierung vorgenommen wird, dient die nichtgraue Temperaturschichtung nach Abb. 26, Kurve 2. Die Intervallgrenzen liegen bei  $\tau_R = 0.0, -1.5, -3.0$  und  $-4.5$ . Abb. 26 zeigt die ATLAS6-Schichtung (Kurve 3), die sich bei Verwendung der F5V-Opazitätstabelle ergibt. Zum Vergleich sind eine graue Temperaturschichtung (Kurve 1) und die nichtgraue Referenzschichtung (Kurve 2) jeweils für den Spektraltyp F5V eingezeichnet. Die Rosselandtiefe  $\tau_R = 1$  liegt bei  $\lg p = 4.9$ . In den subphotosphärischen Gebieten  $\lg p > 4.9$  zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen nichtgrauer und Mehrbandschichtung. Die Mehrbandschichtung

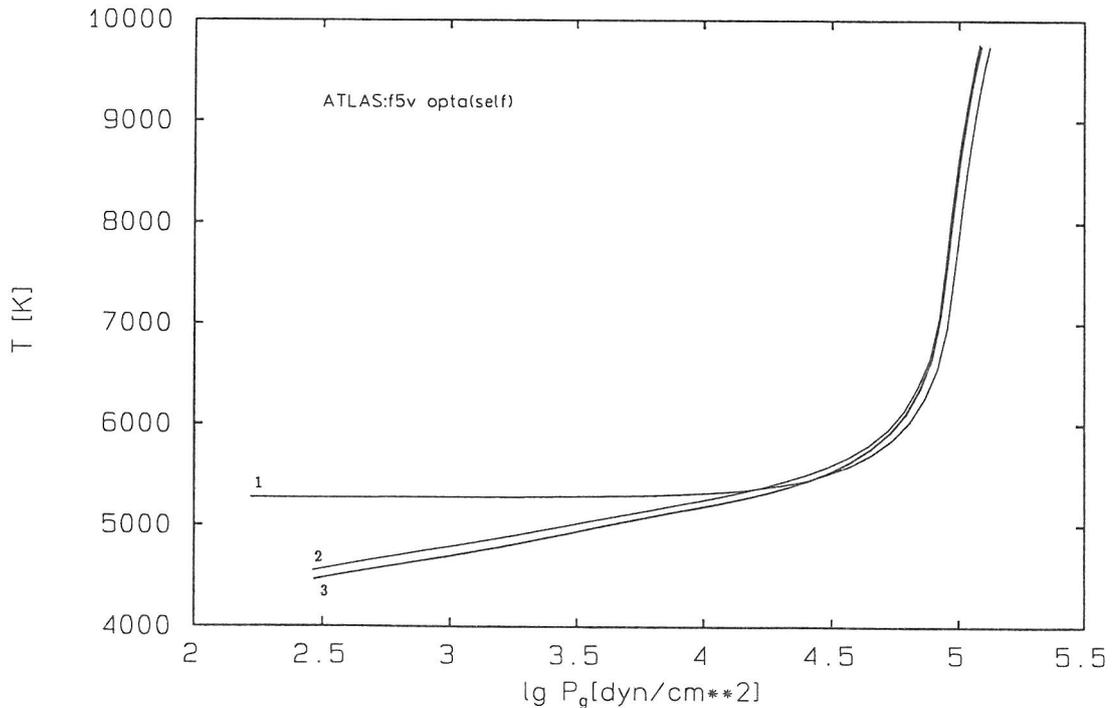


Abb. 26: ATLAS6 Temperaturschichtungen für Atmosphären vom Spektraltyp F5V ( $T_{\text{eff}} = 6500$  K,  $\lg g = 4.44$ ,  $l/H_p = 1.5$ ). Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten, Kurve 3: Mehrbandbeschreibung mit 5 Frequenzpunkten. Die Temperaturschichtung aufgrund der Mehrbandbeschreibung ist in der Photosphäre maximal 100 K kühler als die nichtgraue.

ist in allen Tiefen etwas kühler als die nichtgraue. Die maximale Temperaturabweichung in der Photosphäre beträgt 100 K bei  $\lg p \approx 3$ . Man vergleiche die Abb. 26 mit Abb. 14 für die Sonne. Insgesamt ist die Qualität der Mehrbandschichtung nicht ganz so gut wie im solaren Fall.

Die Abb. 27 zeigt den Verlauf des Absorptionskoeffizienten pro Masseneinheit in der nichtgrauen Referenzatmosphäre für die fünf Frequenzsätze der F5V-Mehrbandbeschreibung. Wie bei der Sonne (vergl. Abb. 15) zeigt sich in der Photosphäre ein gleichmäßiges Verhalten, das erst ab  $\tau_R \approx 1$  gestört ist.

Da sich die Bedingungen in der Sonnen- und F5V-Atmosphäre im Hinblick auf eine Mehrbandbeschreibung ähneln, könnte man fragen, was die F5V-Opazitätstabelle bei Anwendung auf die Sonne ergibt. Abb. 28 zeigt eine solare ATLAS6-Schichtung (Kurve 3), die mit Hilfe der F5V-Opazitäten berechnet ist. Zum Vergleich sind wieder die graue und nichtgraue solare Schichtung aufgetragen. Die Übereinstimmung zwischen der nichtgrauen und der F5V-Mehrbandschichtung ist nicht ganz so gut wie bei Verwendung der solaren Opazitätstabelle. Die maximale Temperaturabweichung beträgt 80 K. Trotzdem ist die Übereinstimmung nach Abb. 28 so gut, daß es bei geringeren Ansprüchen an die Wiedergabequalität des nichtgrauen Strahlungstransportes möglich wäre, bei konstanter Schwerebeschleunigung den Effektivtemperaturbereich zwischen Sonne und F5V-Atmosphären mit einer Tabelle — etwa der für den Spektraltyp F5V — abzudecken.

### 5.3 Spektraltyp A0V (Wega)

Der A0V-Standardstern Wega ( $T_{\text{eff}} = 9500$  K,  $\lg g = 3.90$ ) ist seit längerer Zeit ein Kieler Untersuchungsobjekt. Im Gegensatz zu den in den vorangegangenen

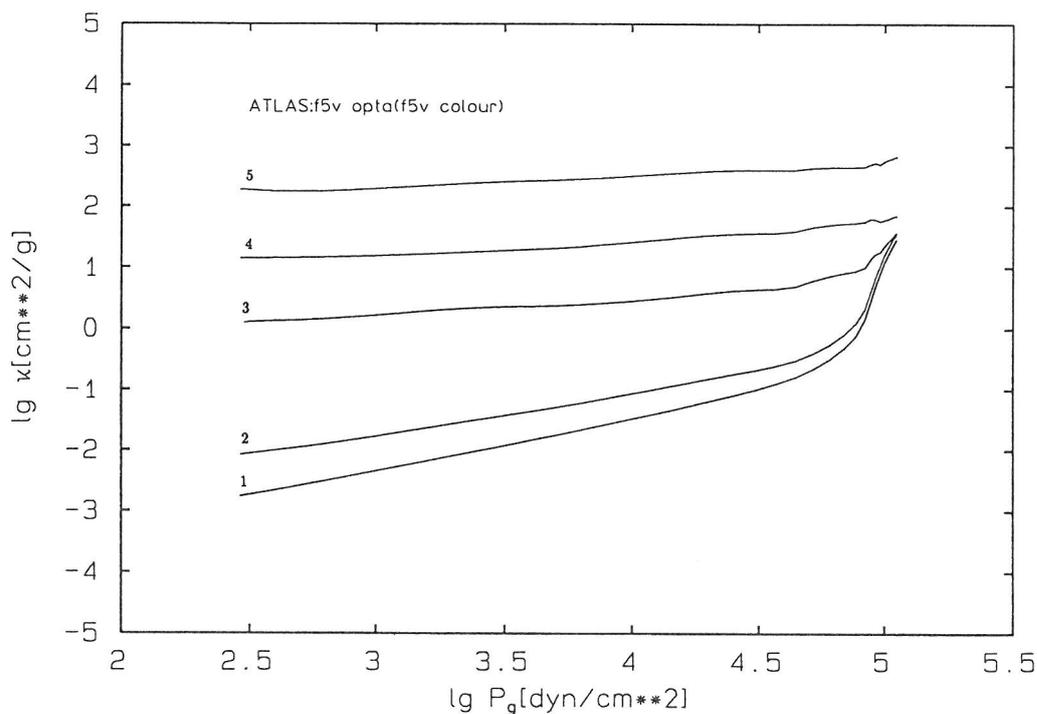


Abb. 27: Massenabsorptionskoeffizient als Funktion des Gasdruckes für die fünf Frequenzsätze der F5V-Opazitätstabelle. Aufgetragen ist der Verlauf in der nichtgrauen F5V-Referenzatmosphäre, die in Abb. 26 als Kurve 2 eingezeichnet ist.

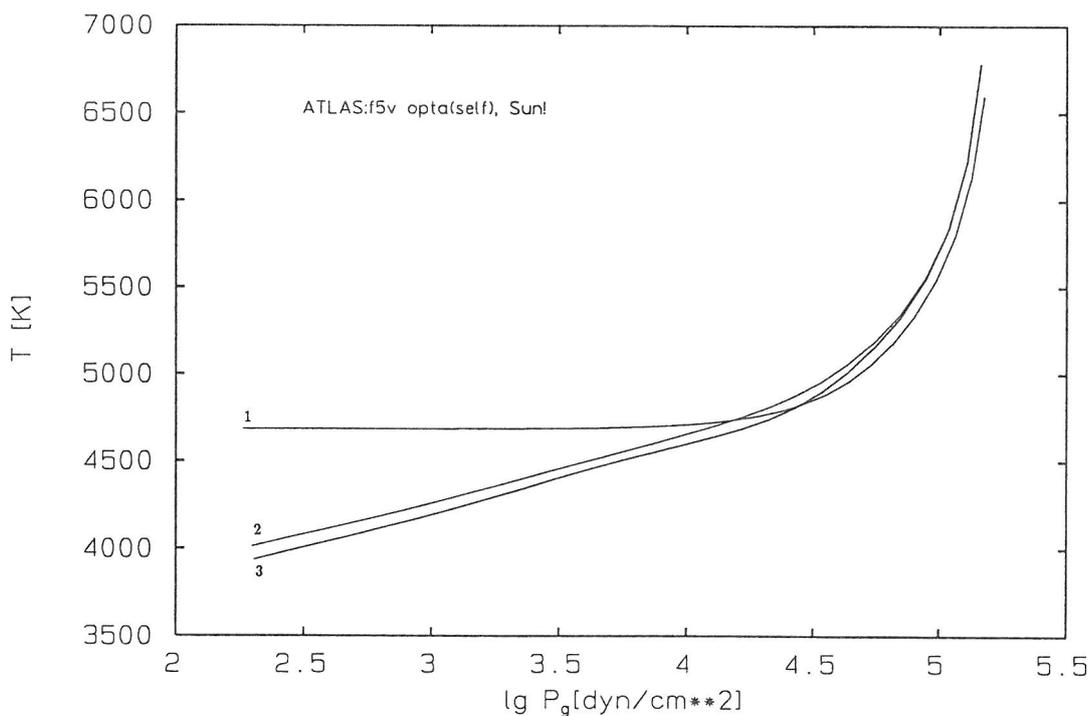


Abb. 28: ATLAS6 Temperaturschichtungen für die Sonne. Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten, Kurve 3: F5V-Mehrbandbeschreibung mit 5 Frequenzpunkten. Die Temperaturschichtung aufgrund der Mehrbandbeschreibung ist maximal 80 K kühler als die nichtgraue.

Abschnitten besprochenen späteren Spektraltypen besitzt Wega keine ausgeprägte oberflächennahe Konvektionszone. Der Beitrag der Konvektion zum Energietransport ist vernachlässigbar gering, im Rahmen der Mischungswegtheorie sind in der Photosphäre Geschwindigkeiten in der Größenordnung weniger 100 m/s zu erwarten. Spektroskopisch nachgewiesen sind Geschwindigkeiten von etwa 2 km/s (siehe GIGAS, 1986 sowie GIGAS, 1990). Dieser Widerspruch zwischen klassischer Theorie und den Beobachtungsbefunden macht Wega für hydrodynamische Studien besonders interessant. Dies hat zu der Wahl des Spektraltyps A0V als weiteres Beispiel geführt, für den eine Mehrbandbeschreibung konstruiert wird.

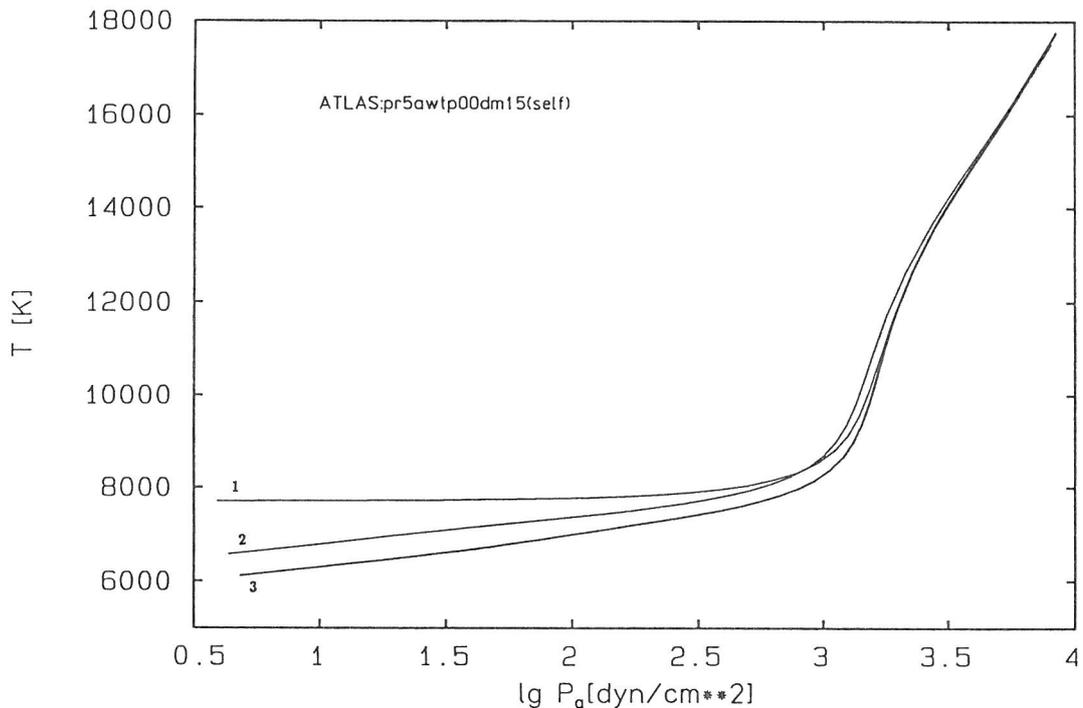


Abb. 29: ATLAS6 Temperaturschichtungen für die Wegaatmosphäre ( $T_{\text{eff}} = 9500$  K,  $\lg g = 3.90$ ,  $l/H_p = 1.5$ ). Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten, sie dient bei der Sortierung als Referenzatmosphäre, Kurve 3: Mehrbandbeschreibung mit 5 Frequenzpunkten. Die Sortierung erfolgt hier nach den gleichen Kriterien wie für die späten Spektraltypen (G2V, F5V). Die Mehrbandbeschreibung, die Schichtung 3 liefert, ist *nicht* in den hydrodynamischen Rechnungen verwendet worden.

Wie im Abschnitt über zusätzliche Sortierkriterien bereits angedeutet worden ist, muß die Vorgehensweise bei der Konstruktion der Mehrbandbeschreibung für Wega etwas modifiziert werden. Benutzt man für die Frequenzsortierung zunächst die gleichen Parameter wie für die späteren Spektraltypen ( $\tau$ -Sortierung, Intervallgrenzen  $\tau_R = 0.0, -1.5, -3.0, -4.5$ ), resultiert eine Mehrbandbeschreibung, die die Temperaturschichtung (Kurve 3) in Abb. 29 liefert.  $\tau_R = 1$  liegt bei einem Gasdruck von  $\lg p = 3.16$ . Die Mehrbandschichtung ist in der Photosphäre deutlich kühler als die nichtgraue. In den subphotosphärischen Gebieten besitzt sie eher grauen Charakter. Insgesamt ist die Wiedergabe der nichtgrauen Schichtung wenig zufriedenstellend.

Die Abbildungen 30 und 31 stellen die Absorptionskoeffizienten im nichtgrauen Fall und aus der Mehrbandbeschreibung gegenüber. Abb. 30 zeigt, daß die Variation der Kontinuumsopazität in der Wegaatmosphäre durch die HI gebundenfrei Absorption dominiert wird. Nach Abb. 31 sind im wesentlichen zwei spektrale Fenster dem Kontinuumsband zugeordnet. Eins liegt direkt langwellig der Balmerkante ( $\lambda = 3647.1 \text{ \AA}$ ,  $\lg \lambda = 3.562$ ), das andere kurzwellig der Balmerkante um

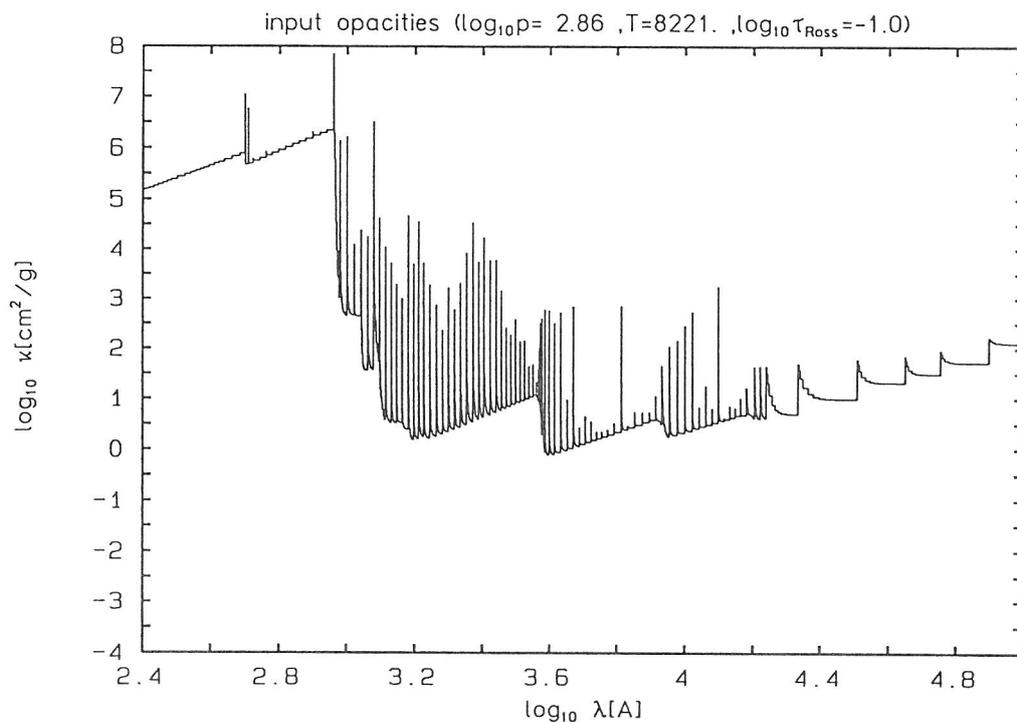


Abb. 30: Nichtgrauer Absorptionskoeffizient für  $\lg p = 2.86$  und  $T = 8221$  K. Dies entspricht den Verhältnissen in der nichtgrauen ATLAS6 Wegaatmosphäre (Abb. 29, Kurve 2) in einer optischen Tiefe  $\lg \tau_R = -1.0$ .

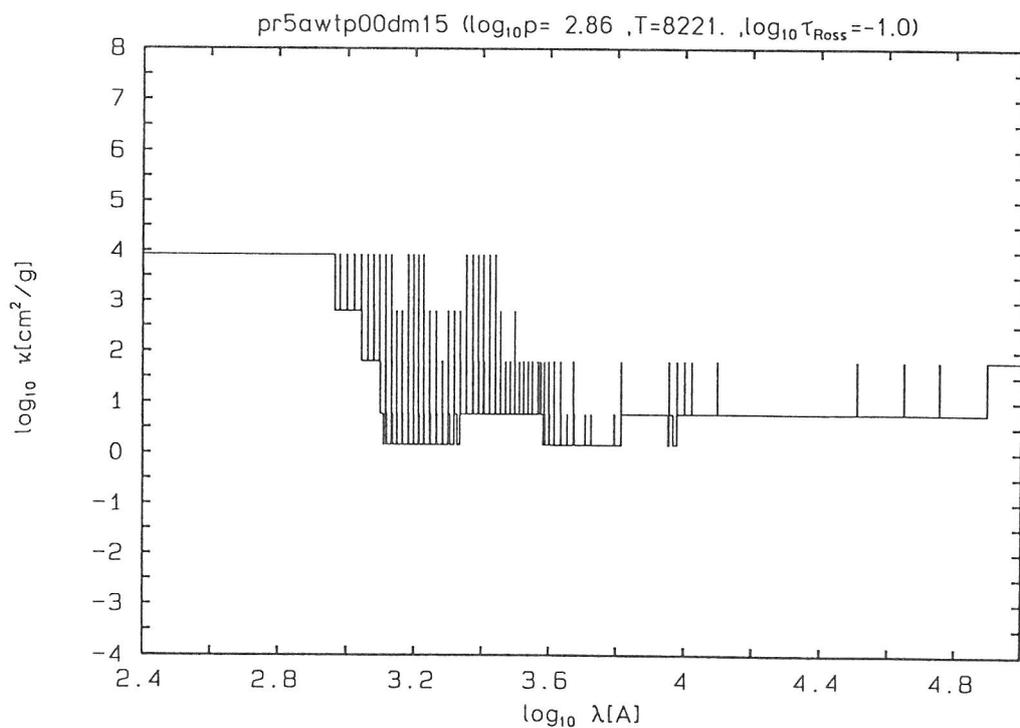


Abb. 31: Absorptionskoeffizient gemäß der A0V-Opazitätstabelle unter Verwendung der gleichen Parameter, wie sie für die späteren Spektraltypen benutzt worden sind. Die thermodynamischen Bedingungen entsprechen denen aus Abb. 30.

$\lg \lambda = 3.2$ . Sie korrespondieren mit den lokalen Minima in der Kontinuumsopazität nach Abb. 30. Abb. 29 legt die Vermutung nahe, daß die Wiedergabe der Kontinuumsopazität ungenügend ist, da schon in Schichten unterhalb  $\tau_R = 1$  Abweichungen im Temperaturverlauf zwischen dem nichtgrauen und Mehrbandstrahlungstransport deutlich werden.

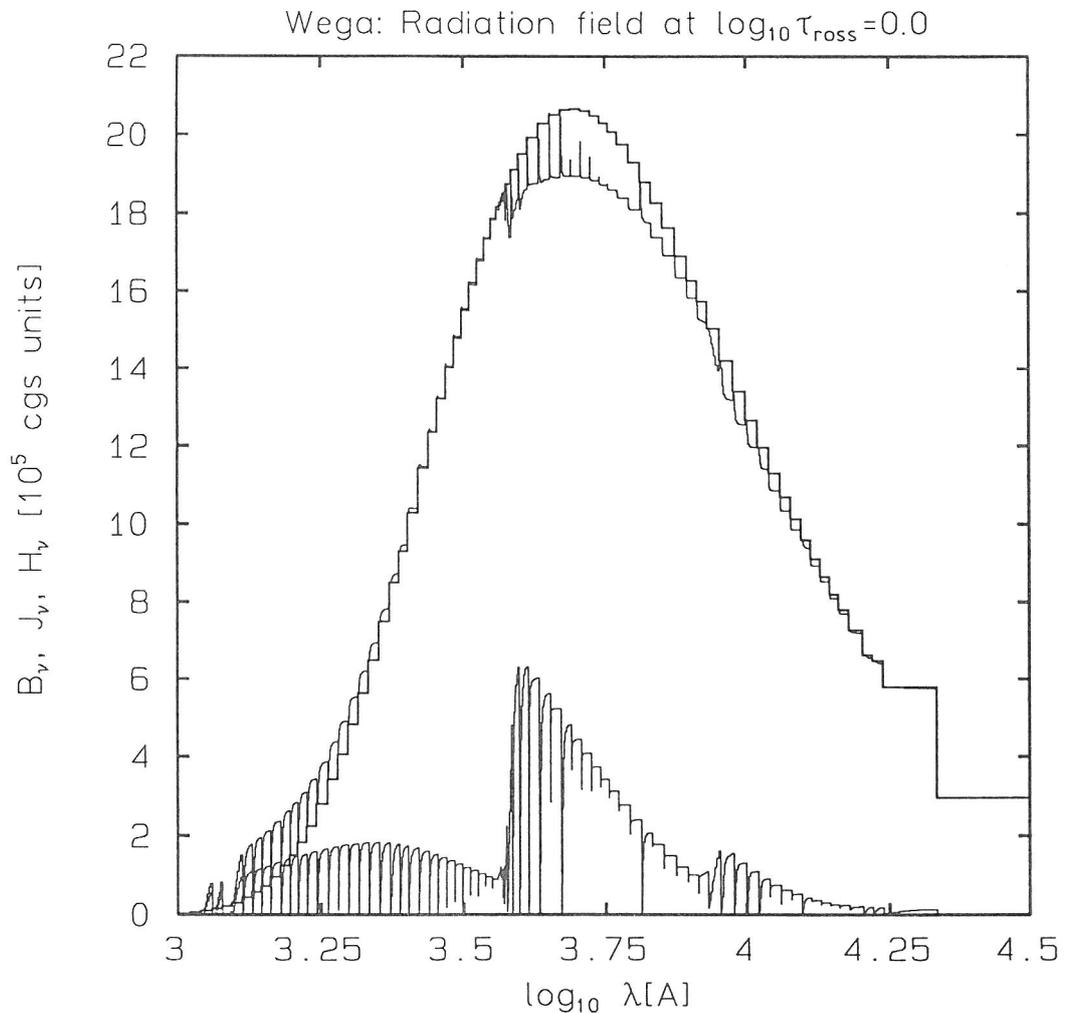


Abb. 32: Quellfunktion, mittlere Intensität und Eddingtonfluß in der nichtgrauen Wegaatmosphäre bei  $\lg \tau_R = 0$  als Funktion der Wellenlänge. Die Treppenkurve stellt die Quellfunktion dar, die Kurve mit annähernd gleichem Verlauf die mittlere Intensität und die Kurve mit deutlich kleineren Funktionswerten den Fluß.

Abb. 32 demonstriert die Situation für das Strahlungsfeld in der optischen Tiefe  $\lg \tau_R = 0$ . Es wird deutlich, daß Flußanteile kurz- wie langwellig der Balmerkante zum Gesamtfluß entscheidend beitragen. Ferner zeigt sich, daß die Kontinuumsfrequenzpunkte in beiden Bereichen ein grundsätzlich anderes Ein- bzw. Ausstrahlungsverhalten besitzen. Langwellig der Balmerkante ist  $B_\nu > J_\nu$ , diese Frequenzen kühlen, kurzwellig ist  $B_\nu < J_\nu$ , diese Frequenzen heizen das stellare Plasma. Da die Wegaatmosphäre in allen Tiefen im Strahlungsgleichgewicht ist, kompensieren sich diese Beiträge. Wie wir bei der Besprechung des Planck-Mittels gesehen haben, ist es ungünstig, Frequenzen mit unterschiedlichem Ein/Ausstrahlungsverhalten in einem Band zusammenzufassen. Dies trifft besonders auf das Kontinuum zu, das das Temperaturverhalten beim Übergang von optisch dicken zu dünnen Gebieten bestimmt. Daher wird für Wega das Kontinuumsband, das sich nach  $\tau$ -Sortierung

ergibt, in zwei Bänder geteilt. Der eine Frequenzsatz beinhaltet die Kontinuumsfrequenzpunkte kurzwellig der Balmerkante, der andere die übrigen.

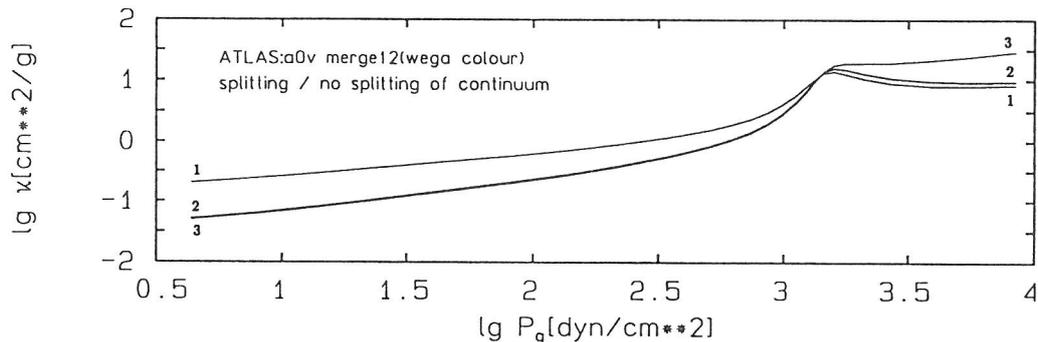


Abb. 33: Kontinuumsopazitäten gemäß der Mehrbandbeschreibungen mit geteiltem und ungeteiltem Kontinuumsband. Kurve 1: Bereich kurzwellig der Balmerkante (Balmerkontinuum), Kurve 2: Gesamt, Kurve 3: Bereich langwellig der Balmerkante (Paschenkontinuum). Als Schichtung, in der die Opazität berechnet wird, dient die nichtgraue Referenzatmosphäre (Abb. 29, Kurve 2).

Abb. 33 zeigt das Resultat im Hinblick auf die Absorptionskoeffizienten in der nichtgrauen Referenzatmosphäre. Kurve 2 gibt das Verhalten für das Gesamtband wieder. Kurve 1 gibt den mittleren Absorptionskoeffizienten für den Anteil der Frequenzpunkte im Balmerkontinuum, Kurve 3 den im Paschenkontinuum. Die Opazitäten der Teilbänder (Kurven 1 und 3) besitzen bei  $\lg p \approx 3.15$  also  $\tau_R \approx 1$  die gleiche Größe, was normalerweise zu ihrer Zusammenfassung in einem Band führt. Bemerkenswerterweise zeigt sich weiter, daß in den subphotosphärischen Schichten die Opazität im Paschenkontinuum größer als im Balmerkontinuum ist, während sich die Verhältnisse beim Übergang in die Photosphäre umkehren. Wie gibt die Gesamtopazität die Situation wieder? In den subphotosphärischen Schichten wird das Rosseland-Mittel benutzt, so daß die Gesamtopazität vornehmlich Frequenzpunkte mit kleinen Absorptionskoeffizienten repräsentiert. Daher folgt hier Kurve 2 annähernd Kurve 1. Mit dem Übergang in die Photosphäre wird auf das Planck-Mittel umgeschaltet. Betrachtet man Abb. 32, so zeigt sich, daß die Kirchhoff-Planck-Funktion die Frequenzen um  $\lg p = 3.2$ , wo das kurzwellige Kontinuumsband liegt, nur gering gewichtet. D.h. die Opazität im langwelligen Kontinuumsband beherrscht die Gesamtopazität, so daß Kurve 2 nun weitgehend mit Kurve 3 zusammenfällt. Die Gesamtopazität gibt insgesamt somit nicht ein mittleres Verhalten der Opazitäten in den Teilbändern wieder, sondern folgt jeweils einem der Teilbänder.

Zwei Effekte sorgen für das unterschiedliche Ein/Ausstrahlungsverhalten lang- und kurzwellig der Balmerkante. Zum einen ist es die unterschiedliche Temperaturabhängigkeit der Quellfunktion, zum anderen der systematisch abweichende Verlauf der Absorptionskoeffizienten nach Abb. 33 wie auch der  $\tau$ -Skalen nach Abb. 36. Letztlich liegt der Grund für den systematisch anderen Verlauf des Absorptionskoeffizienten in beiden Kontinuumsbändern darin, daß das Verhältnis der Besetzungszahlen zwischen dem Niveau  $n = 3$  und dem Niveau  $n = 2$  des Wasserstoffs in der Wegaatmosphäre monoton von innen nach außen abnimmt. Insofern separiert die Balmerkante nicht zufällig die Bereiche unterschiedlichen Ein/Ausstrahlungsverhaltens voneinander.

Abb. 34 zeigt die Temperaturschichtung der Mehrbandbeschreibung mit geteiltem Kontinuumsband. Gegenüber Abb. 29 ist der Temperaturverlauf deutlich verbessert. In den subphotosphärischen Gebieten resultieren nur geringe Unterschiede zur nichtgrauen Schichtung, in der Photosphäre findet man eine Temperaturabwei-

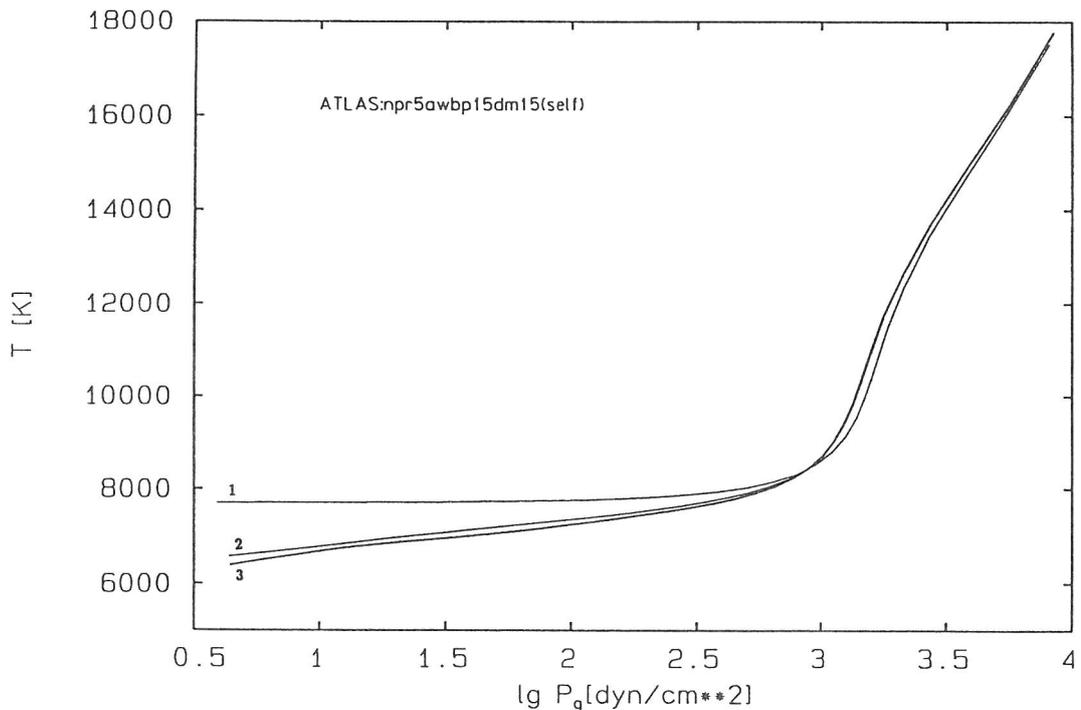


Abb. 34: ATLAS6 Temperaturschichtungen für die Wegaatmosphäre. Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten, Kurve 3: Mehrbandbeschreibung mit 5 Frequenzpunkten und geteiltem Kontinuumsband. Die Temperaturabweichung zwischen nichtgrauer und Mehrbandschichtung beträgt 130 K bei  $\lg p = 1.7$ . Man vergleiche mit Abb. 29.

chung von 130 K bei  $\lg p = 1.7$ . Das Kontinuum wird nun in der Mehrbandbeschreibung durch zwei Frequenzsätze modelliert. Wenn man die Linien genauso wie für die späteren Spektraltypen berücksichtigte, wären insgesamt sechs Bänder nötig. Es stellt sich aber heraus, daß die beiden Linienbänder, die die stärksten Linien repräsentieren, zusammengefaßt werden können, ohne daß ein merklicher Verlust in der Wiedergabequalität des Strahlungstransports eintritt. Man kommt damit auch bei Wega in der Mehrbandbeschreibung mit fünf Bändern aus.

Abb. 35 gibt den Verlauf der Opazitäten in den fünf Bändern der A0V-Opazitätstabelle wieder, Abb. 36 die dazugehörige optische Tiefe. Wie bei den späteren Spektraltypen findet man wieder, daß die photosphärische Zuordnung zwischen Band und Größe des Absorptionskoeffizienten nicht in den subphotosphärischen Schichten gewahrt bleibt. Das Linienband, das die höchsten Opazitäten repräsentiert, zeigt einen deutlichen Anstieg im Absorptionskoeffizienten beim Übergang vom Rosseland- zum Planck-Mittel, was darauf zurückzuführen ist, daß dieses Band nun alle Frequenzpunkte enthält, die oberhalb  $\lg \tau_R = -3.0$  optisch dünn werden.

In Abb. 37 sind die radiativen Heizraten für die fünf einzelnen Bänder und die Gesamtrate dargestellt. Die durchgezogenen Kurven resultieren aus dem Mehrbandverfahren, die gestrichelten aus detailliert nichtgrauem Strahlungstransport. Auffällig ist gegenüber den Verhältnissen in der Sonne nach Abb. 24 zunächst, daß die Raten um etwa 1.5 Größenordnungen höher liegen, wenn man konvektiv stabile Gebiete miteinander vergleicht. Dies liegt zum einen an den höheren Opazitäten, die man in Wega bei gleicher optischer Tiefe vorfindet, zum anderen an den höheren Temperaturen in der Wegaatmosphäre, die eine größere Temperaturempfindlichkeit der Kirchhoff-Planck-Funktion bedingen. Dies führt dazu, daß eine Temperaturstörung in der Wegaatmosphäre durch die Strahlung wesentlich schneller als in der Sonne

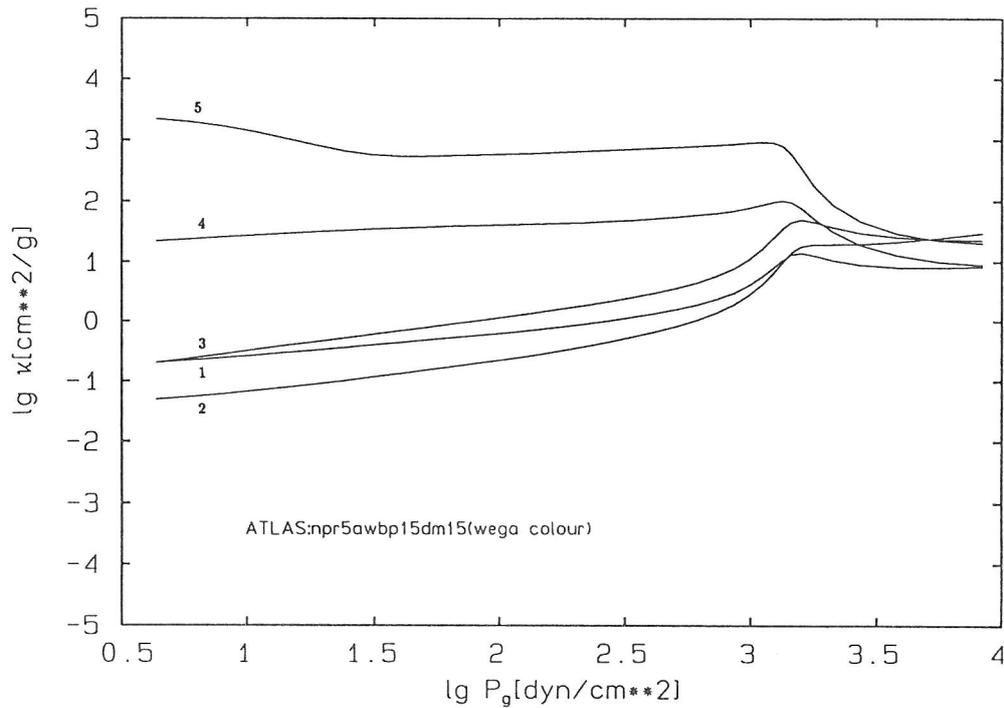


Abb. 35: Massenabsorptionskoeffizient als Funktion des Gasdruckes für die fünf Frequenzsätze der A0V-Opazitätstabelle. Aufgetragen ist der Verlauf in der nichtgrauen A0V-Referenzatmosphäre, die in Abb. 34 als Kurve 2 eingezeichnet ist.

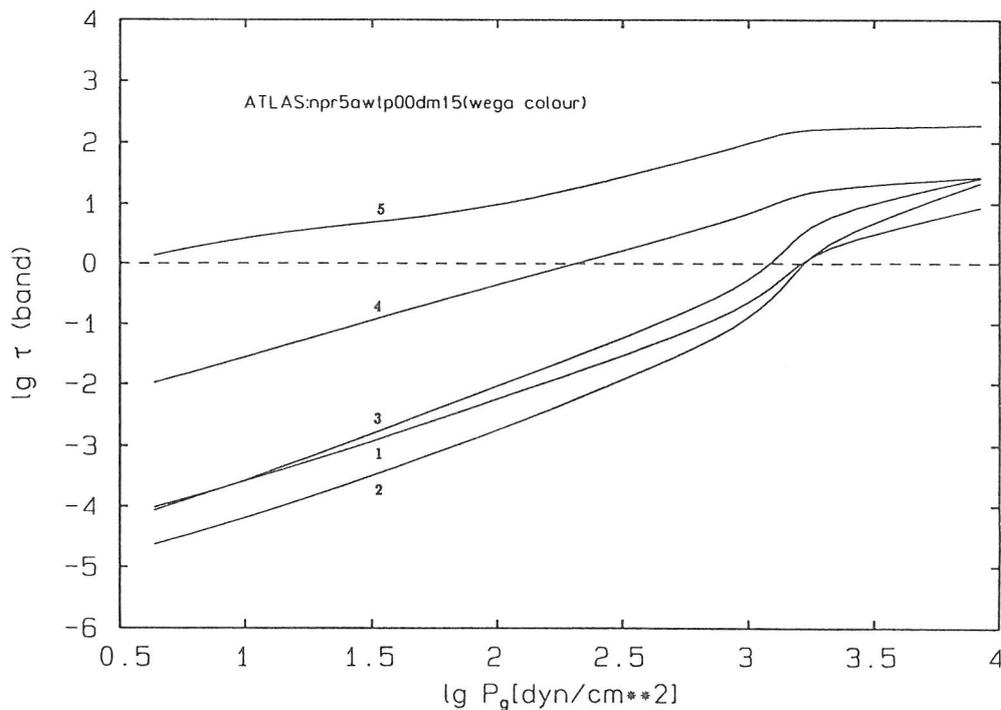


Abb. 36: Optische Tiefe als Funktion des Gasdruckes für die fünf Frequenzsätze der A0V-Opazitätstabelle in der nichtgrauen Referenzatmosphäre.

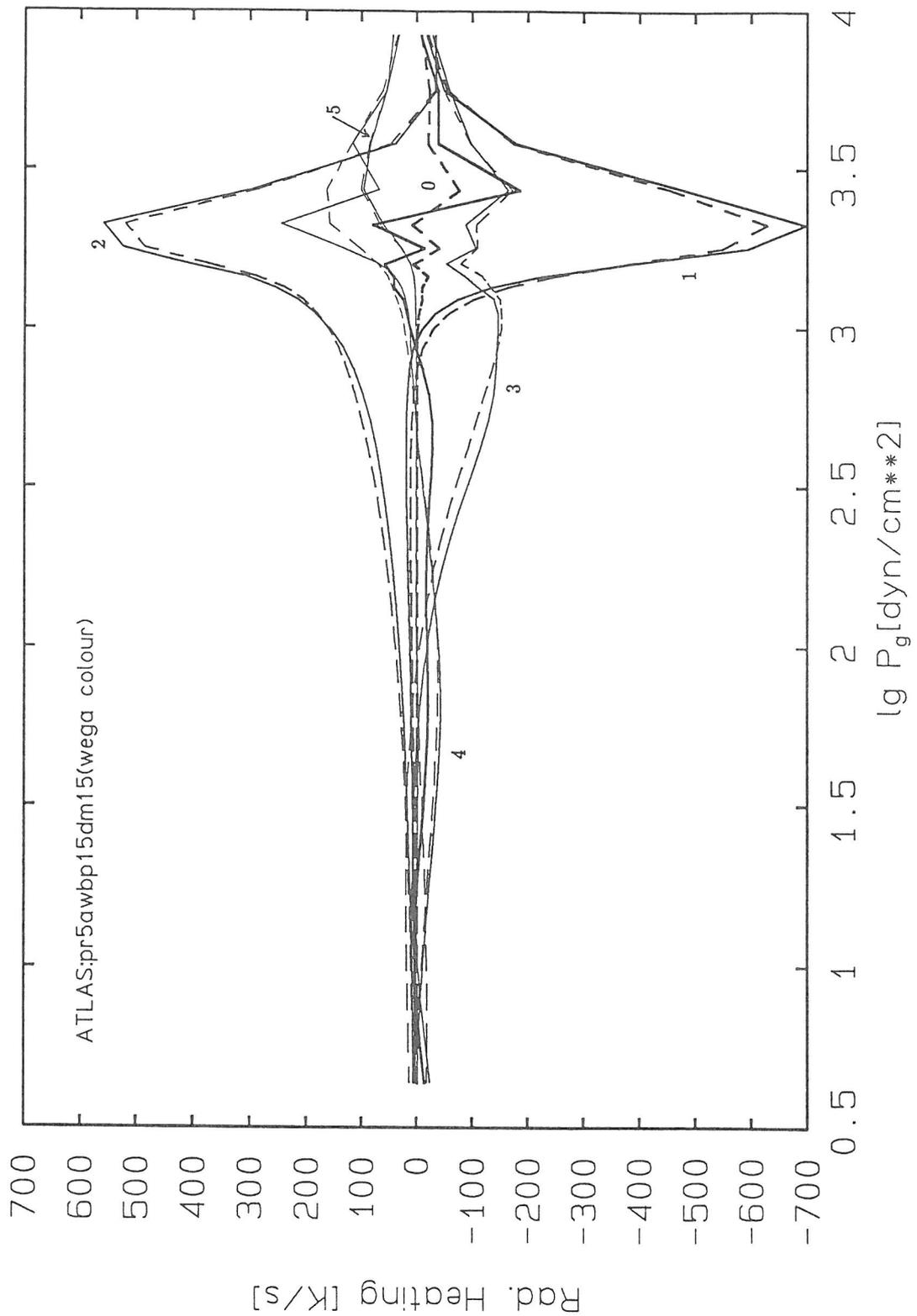


Abb. 37: Strahlungsaustausch für die fünf Frequenzsätze der A0V-Opazitätstabelle in der nicht-grauen Wegaatmosphäre nach Abb. 34, Kurve 2. Dargestellt sind Heizraten nach Gleichung (5.1). Die Frequenzsätze sind von 1 bis 5 numeriert. Nummer 0 bezeichnet die Summe. Jeder Frequenzsatz ist mit einer durchgezogenen und einer gestrichelten Linie gleicher Stärke vertreten. Die durchgezogenen Linien entsprechen dem Ergebnis bei Verwendung des Mehrbandverfahrens, die gestrichelten detailliert nicht-graue Strahlungstransport mit 1220 Frequenzpunkten.

ausgeglichen wird. Anders als dort ist die *radiative Zeitskala* in Wega wesentlich kürzer als die dynamische Zeitskala. Wie wir sehen werden, stellt dies eine Komplikation in den hydrodynamischen Simulationen der Wegaatmosphäre dar.

Abb. 37 zeigt weiterhin die gute Übereinstimmung der Heizraten in den beiden Kontinuumbändern 1 und 2 mit den entsprechenden nichtgrauen. Band 1 beinhaltet die kühlenden Frequenzpunkte langwellig der Balmerkante, Band 2 die heizenden kurzwellig davon.

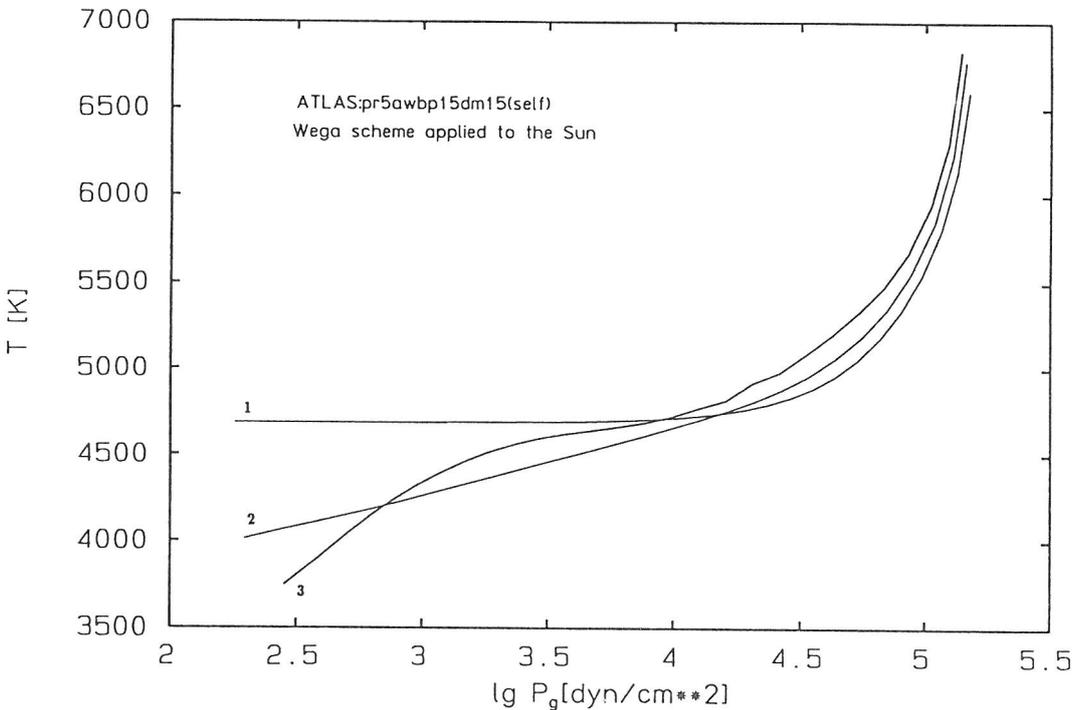


Abb. 38: ATLAS6 Temperaturschichtungen für die Sonne. Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 1220 Frequenzpunkten, Kurve 3: A0V-Mehrbandbeschreibung mit 5 Frequenzpunkten. Die A0V-Opazitätstabelle ist offensichtlich ungeeignet, den Strahlungstransport in der Sonne wiederzugeben.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei noch die Frage gestellt, inwieweit die A0V-Opazitätstabelle in den späteren Spektraltypen brauchbar ist. Nach Abb. 38 vermittelt die A0V-Mehrbandbeschreibung für die Sonne ein gänzlich unrealistisches Bild. Es bleibt damit festzuhalten, daß der Bereich der Hauptreihensterne von Sonne bis Wega nicht mit Hilfe einer einzigen Opazitätstabelle abgedeckt werden kann.

#### 5.4 Weißer Zwerg, Spektraltyp DA

Die letzte Mehrbandbeschreibung, die präsentiert werden soll, fällt etwas aus dem bisherigen Rahmen. Sie wird für die Atmosphäre eines Weißen Zwergs vom Spektraltyp DA konstruiert. Betrachtet wird eine fast reine Wasserstoffatmosphäre, die eine Spur Helium ( $10^{-6}$  nach Teilchenzahl) enthält, mit einer Effektivtemperatur  $T_{\text{eff}} = 11300\text{K}$  und einer Schwerebeschleunigung  $\lg g = 8.0$ . Die markantesten Unterschiede im Vergleich zu den Hauptreihensternen liegen in der hohen Schwerebeschleunigung und der verschwindenden Metallizität. Trotz der extrem abweichenden atmosphärischen Parameter erweist es sich als möglich, hier analog wie in den Mehrbandbeschreibungen der Hauptreihensterne vorzugehen. Simulationen von Gasströmungen in der Atmosphäre eines Weißen Zwerges sind erst in neuester Zeit angegangen worden. Die Ergebnisse im Hinblick auf die hydrodynamische Aktivität

der Atmosphären solcher Objekte sind von daher noch vorläufiger Natur. Die im Zusammenhang mit diesem Projekt konstruierte Mehrbandbeschreibung ist trotzdem in diese Arbeit aufgenommen worden, da sie die weite Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit des Verfahrens belegt.

Kontinuums- und Linienopazität rühren in der DA-Atmosphäre allein von der Absorption durch Wasserstoff her. Die Kontinuumsopazität des Wasserstoffs wird in gleicher Weise wie in den Hauptreihensterne berücksichtigt. Die Linienopazität hingegen wird nicht durch eine geeignete ODF modelliert, sondern analog der Kontinuumsopazität behandelt. Dies geschieht entsprechend auf dem Frequenzgitter für das Kontinuum (122 Frequenzpunkte), so daß die Profile der Wasserstofflinien nur in grober Weise wiedergegeben werden. Abb. 40 zeigt den Verlauf des Absorptionskoeffizienten für thermodynamische Verhältnisse, die in einer nichtgrauen Schichtung bei  $\lg \tau_R = -1.0$  angenommen werden. Auffälligste Wasserstofflinie ist  $L_\alpha$  bei  $\lg \lambda / [\text{\AA}] = 3.085$ . Das Profil dieser sehr starken Linie wird nur durch drei Frequenzpunkte modelliert. Im Ganzen hat man es in der betrachteten Atmosphäre vornehmlich mit Kontinuumsabsorption zu tun, der in einer Mehrbandbeschreibung besonders Rechnung getragen werden muß. Der emergente Strahlungsstrom für den betrachteten Spektraltyp fließt hauptsächlich im Wellenlängenintervall zwischen der  $L_\alpha$ -Linie und etwa  $\lg \lambda = 4.2$ , wobei das Maximum der Flußverteilung (Fluß pro Wellenlängeneinheit) bei  $\lg \lambda = 3.25$  liegt.

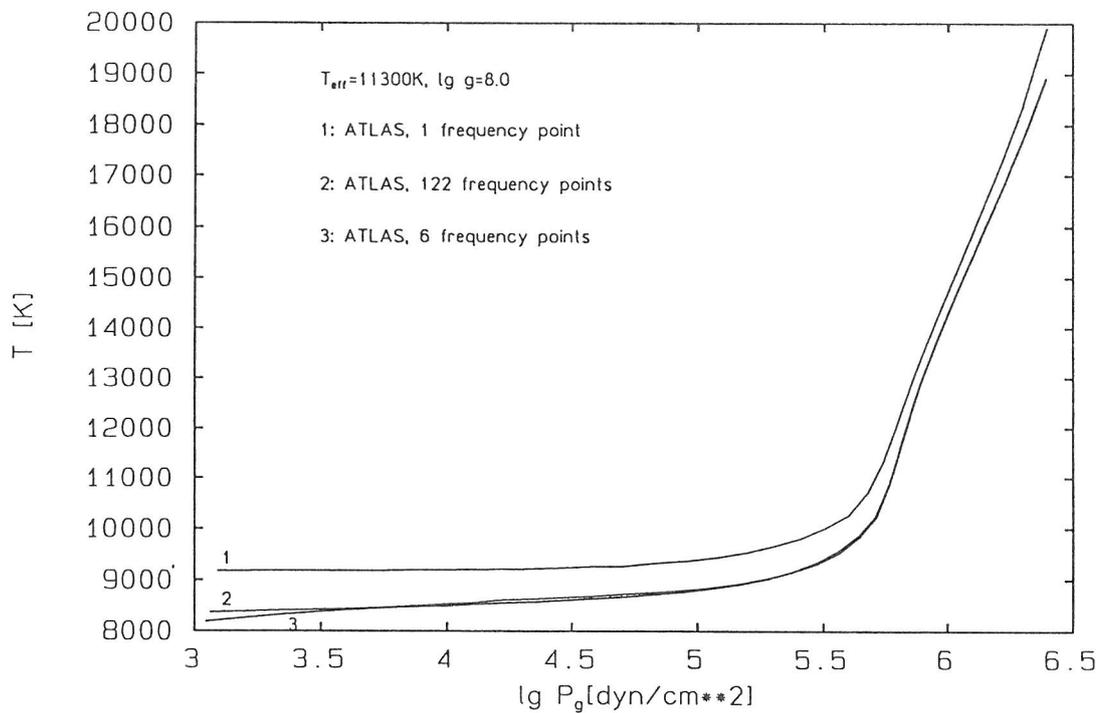


Abb. 39: ATLAS6 Temperaturschichtungen für die Atmosphäre des Weißen Zwergs vom Spektraltyp DA ( $T_{\text{eff}} = 11300 \text{ K}$ ,  $\lg g = 8.0$ ). Kurve 1: graue Näherung, Kurve 2: nichtgraue „exakte“ Temperaturschichtung unter Verwendung von 122 Frequenzpunkten, Kurve 3: Mehrbandbeschreibung mit 6 Frequenzpunkten. Für die Schichtungen ist ein Mischungsweg  $l/H_p = 1.0$  zugrundegelegt. Die Temperaturschichtung aufgrund der Mehrbandbeschreibung stimmt für  $\lg p > 3.5$  bis auf 70 K mit der nichtgrauen überein.

Abb. 39 stellt wieder die drei im Zusammenhang mit dem Mehrbandverfahren wichtigen Temperaturschichtungen gegenüber.  $\lg \tau_R = 0.0$  liegt bei  $\lg p = 5.86$ . Die Schichtungen sind mit einem Mischungsweg  $l/H_p = 1.0$  berechnet. Schichtung 2 dient als Referenzschichtung, in der die  $\tau$ -Sortierung vorgenommen ist. Als Schwel-

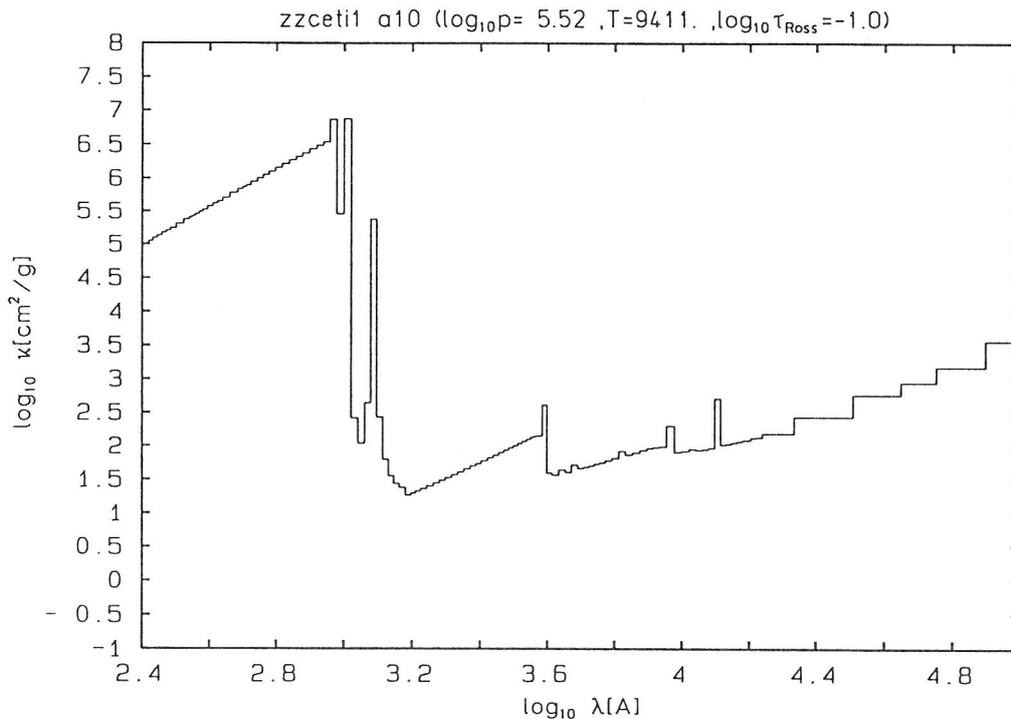


Abb. 40: Nichtgrauer Absorptionskoeffizient für  $\lg p = 5.52$  und  $T = 9411$  K. Dies entspricht den Verhältnissen in der nichtgrauen DA Atmosphäre (Abb. 39, Kurve 2) in einer optischen Tiefe  $\lg \tau_R = -1.0$ .

lenwerte für die Sortierung dienen  $\tau_R = 0.25, 0.0, -0.25, -0.75$  und  $-3.0$ . Man sieht, daß besonderes Gewicht auf die Wiedergabe des Kontinuumsverlaufs gelegt ist. Die resultierende Mehrbandbeschreibung mit sechs Bändern liefert Temperaturschichtung 3 in Abb. 39. Sie stimmt in Gebieten mit  $\lg p > 3.5$  ( $\lg \tau_R > -3.8$ ) bis auf 70 K mit der nichtgrauen Temperaturschichtung überein. Die etwas größere Abweichung außen könnte durch Hinzunahme eines weiteren Linienbandes reduziert werden. Bemerkenswert ist in Abb. 39 das Verhalten der grauen Temperaturschichtung (Kurve 1), die untypischerweise stets heißer als die nichtgraue ist. In den subphotosphärischen Gebieten beträgt die minimale Differenz 400 K.

Das ATLAS6-Programm ist auf die Berechnung von Atmosphären für Hauptreihen- und Riesensterne zugeschnitten, weniger auf die Behandlung der Atmosphären Weißer Zwerge. Um die Qualität der erhaltenen Temperaturschichtungen zu überprüfen, ist die nichtgraue Temperaturschichtung mit einer entsprechenden Schichtung verglichen worden, die der LTE-Atmosphärencode nach KOESTER ET AL. (1979) liefert (JORDAN, 1991). Dieser Code ist speziell zur Konstruktion von Atmosphären Weißer Zwerge ausgelegt. In der Photosphäre findet man gute Übereinstimmung zwischen den Temperaturschichtungen bei Verwendung eines Mischungswegs  $l/H_p = 1.0$  in beiden Programmen.

Abb. 41 zeigt die Opazität, wie sie die Mehrbandbeschreibung der betrachteten DA-Atmosphäre liefert. Der Verlauf ist mit dem aus Abb. 40 zu vergleichen. Man sieht, daß besonders das Verhalten der Opazität in der Nähe des Flußmaximums um  $\lg p = 3.25$  gut approximiert wird. Dies betrifft sowohl das Kontinuum als auch die Modellierung der  $L_\alpha$ -Linie.

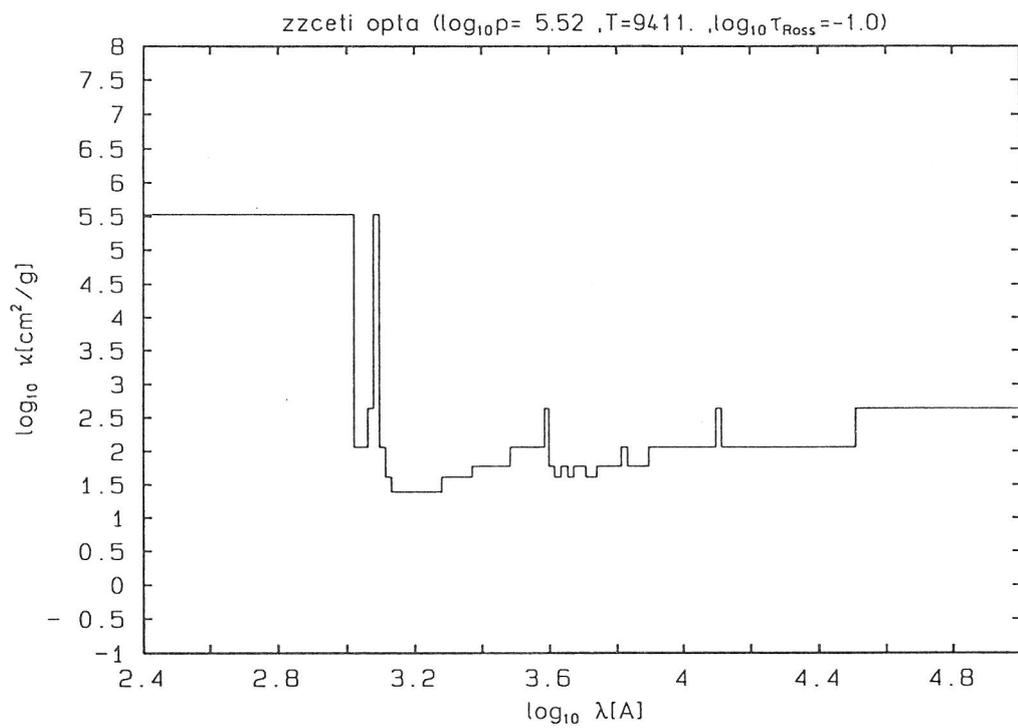


Abb. 41: Absorptionskoeffizient gemäß der Opazitätstabelle für den Weißen Zwergstern vom Spektraltyp DA ( $T_{\text{eff}} = 11300$  K,  $\lg g = 8.0$ ). Die thermodynamischen Bedingungen entsprechen denen aus Abb. 40.

## 6 Die Hydrodynamik-Simulationen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse aus den Hydrodynamik-Simulationen dargestellt. Die Besprechung der einzelnen Spektraltypen erfolgt in der gleichen Reihenfolge wie die Vorstellung der zugehörigen Mehrbandbeschreibungen. Vorab seien aber zunächst einige Bemerkungen zur Vorgehensweise erlaubt.

### 6.1 Allgemeine Bemerkungen

Die hydrodynamische Simulation einer Sternatmosphäre mit dem HD-Code liefert die zeitliche Entwicklung der Strömungsgeschwindigkeit wie des thermodynamischen Zustands an jedem Ort des Raumvolumens, das für die Simulation vorgegeben wird. Die Entwicklung des Systems sollte dabei über Zeitskalen verfolgt werden, die deutlich länger sind als die, auf der sich die „hydrodynamischen Aktivitäten“ abspielen, das Raumvolumen sollte groß genug sein, um die auftretenden Strukturen aufnehmen zu können. Auf der Sonne etwa wäre die hydrodynamische Zeitskala durch die Lebensdauer ( $\approx 16$  min), das Raumvolumen durch den Durchmesser ( $\approx 950$  km) eines typischen Granulums gegeben (Daten nach BRAY ET AL., 1984). Die hydrodynamische Beschreibungsweise des Systems liefert eine enorme Informationsmenge in Form von numerischen Daten, die geeignet aufbereitet werden müssen, um überhaupt „verständlich“ zu werden und um wesentliche Aspekte herauszuarbeiten.

Vielleicht die direkteste Umsetzung der numerischen Ergebnisse ist die Visualisierung der Gasströmung als Film. In der Tat sind einige HD-Modelle so bearbeitet worden. Diese Videos liefern den besten Eindruck von der Dynamik, mit der die hydrodynamischen Vorgänge ablaufen. Abgesehen davon, daß im Rahmen dieser Arbeit eine solche Darstellungsform nicht möglich ist, liefert sie kaum exakte quantitative Aussagen über die Vorgänge. Hier ist man genötigt, die Darstellung auf geeignete *zeitliche oder räumliche Ausschnitte* des Geschehens zu beschränken oder *zeitliche und räumliche Mittelwerte* der physikalischen Parameter zu betrachten. Beide Möglichkeiten werden im folgenden genutzt. Insbesondere der *Vergleich der verschiedenen Modelle* untereinander geschieht über Mittelwerte.

Um einen Eindruck von den Resultaten eines hydrodynamischen Simulationslaufs zu vermitteln, ist hier im Vorgriff auf die Besprechung der Sonne in Abb. 42 ein Hydrodynamik-Modell der Sonnenatmosphäre dargestellt. Genauer gesagt handelt es sich um ein Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes, wie es während der zeitlichen Entwicklung des Systems typischerweise auftritt. Das Modell besitzt zweidimensionale kartesische Geometrie. Die dargestellten Strukturen muß man sich senkrecht zur Papierebene unendlich fortgesetzt denken, die räumliche Ableitung sämtlicher Größen verschwindet in dieser Richtung. Wie anhand der Skalen erkennbar, hat das Simulationsvolumen eine Ausdehnung, die sich horizontal ( $x$ ) über 2625 km und vertikal ( $z$ ) von  $-350$  km bis  $+475$  km erstreckt. Der Nullpunkt der vertikalen Skala fällt mit  $\tau_R = 1$  der horizontal gemittelten Schichtung zusammen. Das Temperaturfeld ist durch Isothermen in einer Staffelung von 200 K veranschaulicht, das Geschwindigkeitsfeld wird in gängiger Weise durch Vektorpfeile dargestellt, deren Länge proportional zum Betrag der Geschwindigkeit ist. Die maximal auftretende Geschwindigkeit beträgt 8.05 km/s, die maximal auftretende Temperatur 12015 K. Für einige eingezeichnete Isothermen ist die zugehörige Temperatur unten vermerkt. Das Modell besitzt einen offenen oberen und unteren Rand, so daß dort Ein- und Ausströmungen möglich sind. Gleiches gilt für die Seitenwände, nur daß dort eine periodische Fortsetzung des Simulationsvolumens angenommen wird: Was z.B. links herausströmt, strömt rechts gleichzeitig wieder

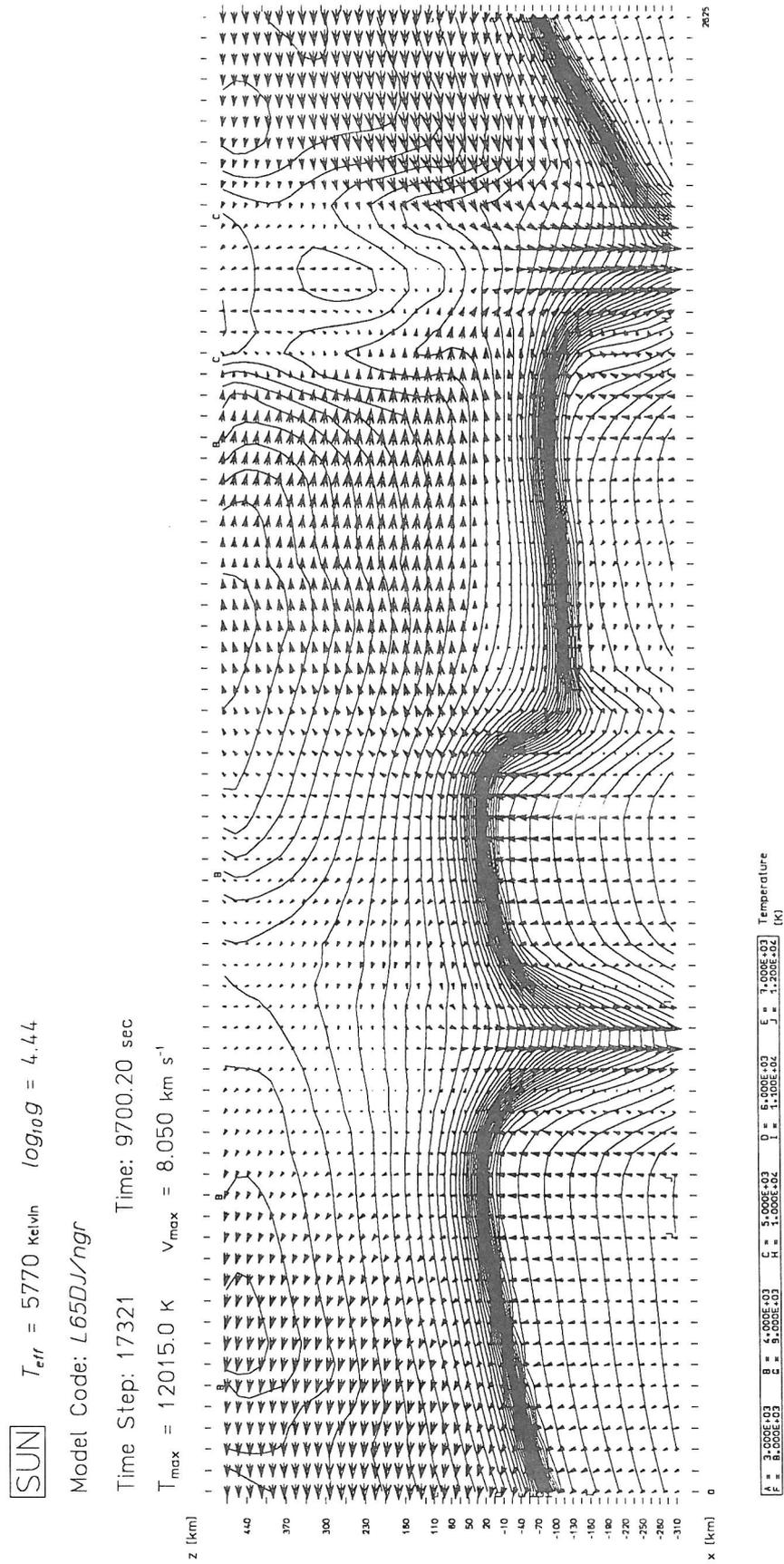


Abb. 42: Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes eines nichtgrauen Hydrodynamik-Sonnenmodells. Weitere Erläuterungen siehe Text.

hinein. Der Strahlungstransport geschieht in dem Modell nichtgrau mit Hilfe der G2V-Mehrbandbeschreibung, was nicht direkt aus der Abbildung ersichtlich ist.

Die Mischungswegtheorie, die in den „klassischen“ eindimensionalen Modellatmosphären zur Beschreibung der Konvektion eingesetzt wird, sagt voraus, daß die Sonnenatmosphäre bis  $\tau_R \approx 1$  ( $z \approx 0$  km) konvektiv instabil, darüber stabil ist. Im Rahmen dieser Theorie muß man also bis  $\tau_R \approx 1$  mit Gasströmungen rechnen, darüber sollten statische Verhältnisse vorliegen. Nach Abb. 42 zeigen sich in den subphotosphärischen Schichten großräumige langsame Aufwärts- und konzentrierte schnelle Abwärtsströmungen. Entgegen den Aussagen der Mischungswegtheorie finden sich aber auch in den photosphärischen Gebieten Strömungen mit zum Teil erheblichen Geschwindigkeiten. Wären die photosphärischen Bereiche isoliert, wären sie auch in den Hydrodynamik-Modellen konvektiv stabil. Die dort auftretenden Geschwindigkeiten werden durch die Konvektion in den tiefer gelegenen Bereichen angefacht. Man spricht im Bild der Mischungswegtheorie von einem *Überschießen* (englisch „overshoot“) von Massenelementen aus den konvektiv instabilen Gebieten in die stabilen hinein. Wie wir sehen werden, kann das Überschießen eine Abkühlung der Photosphäre gegenüber einer Strahlungsgleichgewichtsschichtung bewirken, die von eindimensionalen Modellatmosphären geliefert wird.

In den nächsten Abschnitten werden Hydrodynamik-Modelle vorgestellt, in denen der Strahlungstransport mit Hilfe des Mehrbandverfahrens nichtgrau beschrieben ist. Um die Veränderungen gegenüber der grauen Näherung zu dokumentieren, werden diese mit entsprechenden grauen Modellen verglichen. Da die Photosphäre in den Hydrodynamik-Modellen Abweichungen vom Strahlungsgleichgewicht zeigen kann, ist weiterhin der Vergleich mit Strahlungsgleichgewichtsmodellen interessant. Um einen möglichst differentiellen Vergleich zu ermöglichen, werden diese mit derselben Mehrbandbeschreibung des Strahlungstransportes berechnet, die auch in den Hydrodynamik-Simulationen verwendet wird. Als „Nebenprodukt“ erhält man dabei eine Aussage über Unterschiede in der Wiedergabe des konvektiven Energietransportes in den subphotosphärischen Schichten. Diese Frage ist für eine Reihe astrophysikalischer Arbeitsgebiete von großer Bedeutung, hier sei die Helioseismologie, Sternentwicklung und die Theorie stellarer Pulsationen erwähnt.

Eine Ausnahme stellt in der Beschreibung der Weiße Zwerg dar, da für ihn bisher nur ein graues Hydrodynamik-Modell vorliegt und daher lediglich ein Vergleich mit einer klassischen Modellatmosphäre möglich ist.

Gibt man eine kleine räumliche Ausdehnung des Simulationsvolumens vor, sind annähernd stationäre Strömungsformen möglich. Die stationäre Strömung ist dabei nur noch von Oszillationen überlagert, die man als kleine Störungen auffassen kann. Obwohl im Hinblick auf die tatsächlichen Verhältnisse in einer Sternatmosphäre weniger realistisch, wird ein solches Beispiel für die Sonne präsentiert, da es den Einfluß des nichtgrauen Strahlungstransportes auf die photosphärische Temperaturstruktur unbeeinflusst vom Overshoot zeigt. Das Hauptgewicht liegt im folgenden aber auf instationärer Konvektion, die den Gegebenheiten in realen Sternatmosphären besser entspricht.

Wie vergleicht man Hydrodynamik-Modelle untereinander sowie mit eindimensionalen Modellatmosphären? In dieser Arbeit werden hierzu mittlere Schichtungen aus den Hydrodynamik-Modellen abgeleitet, indem zeitlich und in horizontaler Richtung Mittelwerte relevanter physikalischer Parameter berechnet werden, so daß nur die Tiefeninformation erhalten bleibt. Um trotzdem noch Aussagen über die zeitlichen Variationen und die horizontalen Inhomogenitäten der Strömung zu gewinnen, wird zusätzlich die Standardabweichung vom Mittelwert berechnet.

Interessant bei der Berechnung der mittleren Größen ist die Frage, wie die räumliche Mittelung durchgeführt wird. Sternatmosphären sind bei vorgegebenen Elementhäufigkeiten charakterisiert durch Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung. Eine Randbedingung in den Hydrodynamik-Simulationen ist die Einhaltung der spezifizierten Effektivtemperatur; der emergente Fluß soll im zeitlichen und räumlichen Mittel  $\sigma T_{\text{eff}}^4$  betragen. Gerade für den Vergleich mit 1-D Modellatmosphären ist es wünschenswert, daß die mittleren Schichtungen, die aus den Hydrodynamik-Simulationen abgeleitet werden, auch die Eigenschaft besitzen, den korrekten emergenten Fluß zu liefern. Erst wenn diese Bedingung erfüllt ist, erscheint ein Vergleich zwischen 1-D und Hydrodynamik-Modellen wohldefiniert. Das naheliegende Verfahren, die Größen auf *konstanter geometrischer Tiefe* zu mitteln, gewährleistet die Eigenschaft, den korrekten emergenten Fluß zu liefern, nicht. Besser erscheint es, die Mittelung auf Flächen *konstanter optischer Tiefe* vorzunehmen.

Zur Verdeutlichung sei eine planparallele Sternatmosphäre betrachtet, die zeitlichen Fluktuationen unterliegt, so daß der emergente Fluß  $F$  schwankt. Im zeitlichen Mittel erhält man einen Fluß

$$\bar{F} = \sum_i w_i F_i, \quad (6.1)$$

wobei der Einfachheit halber die Mittelung als Summe geschrieben ist;  $w_i$  sind die zeitlichen und auf eins normierten Gewichte der Flüsse  $F_i$ . Für den emergenten Fluß einer planparallelen Atmosphäre gilt (siehe etwa UNSÖLD, 1968)

$$F = 2\pi \int_0^\infty S(\tau) E_2(\tau) d\tau. \quad (6.2)$$

Dabei ist  $E_2$  die zweite Integraleponentialfunktion,  $S$  die Quellfunktion und  $\tau$  die optische Tiefe. Einsetzen in Gleichung (6.1) liefert

$$\begin{aligned} \bar{F} &= 2\pi \sum_i w_i \int_0^\infty S_i(\tau) E_2(\tau) d\tau = 2\pi \int_0^\infty \left( \sum_i w_i S_i(\tau) \right) E_2(\tau) d\tau \\ &= 2\pi \int_0^\infty \bar{S}(\tau) E_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Gleichung (6.3) zeigt, daß man für den betrachteten Fall die Quellfunktion auf der optischen Skala mitteln müßte, um eine Schichtung  $S(\tau)$  zu erhalten, die exakt den mittleren Fluß liefert. In den Hydrodynamik-Modellen liegen die Verhältnisse natürlich komplizierter, da die Atmosphären horizontal inhomogen sind und der Strahlungstransport frequenzabhängig ist, so daß eine *exakte* Wiedergabe nicht erreicht werden kann. Trotzdem kann man erwarten, daß eine Mittelung auf  $\tau$ -Isoflächen den mittleren Fluß besser erhält als eine Mittelung bei fester geometrischer Tiefe.

Die numerischen Daten, die das Strömungs-, Druck-, Temperatur- und Strahlungsfeld beschreiben, werden während eines hydrodynamischen Simulationslaufs in festen Zeitabständen gespeichert. Die Berechnung der Mittelwerte geschieht mit Hilfe spezieller Programme im Anschluß an die eigentliche Simulation. Es werden dabei nach dem Gesagten Mittel auf Flächen konstanter optischer Tiefe und bei fester geometrischer Tiefe bestimmt. Im Hinblick auf die Mittelung auf der  $\tau$ -Skala soll in diesem Zusammenhang auf ein Problem hingewiesen werden, das bei der Interpretation der Abbildungen berücksichtigt werden muß. Bei der Berechnung der Mittel auf den  $\tau$ -Isoflächen wird so verfahren, daß zunächst ein Gitter von optischen Tiefen vorgegeben wird. Zu jedem (gespeicherten) Zeitpunkt werden die  $\tau$ -Isoflächen bestimmt

und die Größen auf ihnen gemittelt. Es ist aber möglich, daß Flächen, die besonders großen oder kleinen optischen Tiefen entsprechen, nicht zusammenhängend sind. Sie können am oberen oder unteren Rand Lücken aufweisen. Dies tritt ein, wenn an einer bestimmten horizontalen Position die spezifizierte Tiefe am oberen oder unteren Rand des Simulationsvolumens gar nicht erreicht wird. Dies kann von Zeitpunkt zu Zeitpunkt unterschiedlich sein. Es ist davon abgesehen worden, durch Extrapolation zu versuchen, die Flächen dann zu ergänzen. Als Konsequenz muß man in solchen Fällen mit *Auswahleffekten* rechnen. So kann es z.B sein, daß eine besonders geringe optische Tiefe am oberen Rand immer dann vorliegt, wenn die Temperatur dort niedrig ist, was letztlich eine unrealistisch kleine mittlere Temperatur vorspiegeln wird. Von Fall zu Fall werden wir bei der Besprechung der Abbildungen auf diese Möglichkeit hinweisen, so daß dann den Größen an den Rändern des Tiefenintervalls weniger Gewicht beigemessen werden sollte. Bei der Mittelung bei Flächen auf konstanter geometrischer Tiefe stellt sich dieses Problem nicht. Da aber von physikalischen Seite die Mittelung auf  $\tau$ -Isoflächen sinnvoller ist, werden in den nächsten Abschnitten im allgemeinen solche Mittelwerte präsentiert.

Neben Randbedingungen müssen für Hydrodynamik-Simulationen auch geeignete Anfangsbedingungen spezifiziert werden. Man braucht ein *Startmodell*, dessen Zeitentwicklung verfolgt werden soll. Im allgemeinen wird so vorgegangen, daß bereits vorliegende Endmodelle früherer Rechnungen — eventuell nach einigen Modifikationen — als Startmodelle dienen. Ursprünglich sind 1-D Atmosphären, denen Geschwindigkeitsfelder nach Vorhersagen der Mischungswegtheorie willkürlich aufgeprägt wurden, als Ausgangsmodelle verwendet worden. Die Wahl des Startmodells erscheint aber zunächst unkritisch, da wir ein nichtlineares System vor uns haben. Bereits kleinste Störungen in den Anfangsbedingungen führen nach einer gewissen Zeit zu einer gänzlich anderen Entwicklung des Systems. Das System überstreicht während seiner Zeitentwicklung das ganze Phasenraumvolumen, das ihm zur Verfügung steht. Betrachtet man die Modellentwicklung hinreichend lange nach dem Start, so sind ihre Eigenschaften unabhängig vom Startmodell. Für die praktische Durchführung einer Hydrodynamik-Simulation kann eine günstige Wahl des Startmodells aber durchaus hilfreich sein.

Die Simulation der Atmosphäre des Weißen Zwergs ist ein Beispiel. Die thermische Relaxationszeit des Systems ist so lang, daß es aufwendig ist, die Zeitentwicklung zu verfolgen, bis sich im Mittel ein Fließgleichgewicht zwischen der am Boden einströmenden und am oberen Rand ausströmenden Energie eingestellt hat. Hier ist es günstig, wenn das Startmodell nicht zu weit vom Gleichgewicht entfernt ist. Die Atmosphäre von Wega ist ein anderes Beispiel. In der Wegaatmosphäre sind die Zeitskalen, auf denen sich ein im Mittel stationäres Geschwindigkeitsfeld einstellt, extrem lang. Eine Simulation über diese Zeitskalen hinweg ist noch nicht praktikabel. Hier ist die Konstruktion eines Startmodells, das schon weitgehend das „richtige“ Geschwindigkeitsfeld besitzt, von entscheidender Bedeutung. In beiden genannten Fällen sind aber zur Konstruktion eines guten Startmodells Kenntnisse des Systems nötig, die erst durch hydrodynamische Simulationsrechnungen gewonnen werden können. Man ist somit auf ein iteratives Vorgehen angewiesen, indem neues Wissen über das System in das nächste Startmodell einfließt.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen werden im folgenden die Hydrodynamik-Modelle präsentiert. Falls für das jeweilige Modell relevant, werden die oben angesprochenen Probleme nochmals aufgegriffen und an dem konkreten Beispiel diskutiert.

## 6.2 Spektraltyp G2V (Sonne)

### 6.2.1 Stationäre Modelle

In diesem Abschnitt werden zwei stationäre hydrodynamische Sonnenmodelle gegenübergestellt. Tabelle 4 faßt ihre wesentlichen Eigenschaften zusammen. Wegen des relativ kleinen Radius des zylindrischen Simulationsvolumens stellt sich ein fast stationäres Strömungsmuster ein. Das Overshooting in die konvektiv stabilen Schichten fällt geringer als im instationären Fall aus. Ein merkliches Geschwindigkeitsfeld ( $v > 100$  m/s) findet man nur bis in eine Höhe von 300 km. Die Temperaturstruktur der oberen Photosphäre wird daher von der Konvektion nicht beeinflusst. Es bietet sich die Möglichkeit, die Wirkung des unterschiedlichen Strahlungstransportes auf die obere Photosphäre in „Reinkultur“ zu beobachten. Die Stationarität der Strömung erlaubt die Wirkung auf die tieferen Schichten direkt abzulesen, ohne daß eine zeitliche und räumliche Mittelung durchgeführt werden müßte.

Modellcode	D59D10	R4ASTM05M15M25
$T_{\text{eff}}$ (soll)	5770 K	5770 K
$\lg g$	4.44	4.44
Geometrie	zylindrisch	zylindrisch
Seitliche Randbedingung	geschlossen	geschlossen
Unterer Rand	offen	offen
Oberer Rand	geschlossen	geschlossen
Radius	525 km	525 km
Vertikale Ausdehnung	785 km	785 km
Strahlungstransport	grau	nichtgrau
Frequenzpunkte	1	5
Opazitätstabelle	ROSSK	r4astm05m15m25

Tabelle 4: Modellparameter der beiden stationären hydrodynamischen Sonnenmodelle. Der erste Datenblock enthält den Modellnamen und den spezifizierten Spektraltyp, der zweite geometrische Parameter und Randbedingungen und der dritte Eigenschaften des verwendeten Strahlungstransportes. Für den grauen Strahlungstransport ist eine ältere Implementation im HD-Code benutzt worden. Der nichtgraue Strahlungstransport liefert eine Strahlungsgleichgewichtsschichtung nach Abb. 25, Kurve 3.

Die Abbildungen 43 und 44 zeigen die vertikale Temperaturstruktur des grauen bzw. nichtgrauen Modells. Beide Modelle besitzen in horizontaler Richtung 36 Gitterpunkte, für die jeweils der Temperaturverlauf aufgetragen ist. Zusätzlich eingezeichnet ist das horizontale Flächenmittel der Temperatur (Wer findet die Kurve?). Die subphotosphärischen Schichten  $z < 0$  km zeigen in beiden Fällen eine sehr ähnliche Temperaturstruktur. Der steile Temperaturgradient um  $z = 0$  km ist derselbe. Das aus klassischen Modellatmosphären bekannte „backwarming“ tritt in der nichtgrauen HD-Schichtung kaum in Erscheinung. Die obere Photosphäre des nichtgrauen Modells zeigt eine Absenkung der Randtemperatur, wie sie für Strahlungsgleichgewichtsschichtungen zu erwarten ist. Während das graue Modell eine Randtemperatur von 4700 K besitzt, liegt sie im nichtgrauen unter 4000 K. Es sei bemerkt, daß die in Abb. 43 sichtbare Auffächerung der Temperaturkurven am oberen Rand des Modells ein Artefakt der numerischen Behandlung des Strahlungstransportes ist.

Ferner ist die Temperaturstruktur der tieferen Photosphäre bemerkenswert. Sie ist ein Produkt des Overshootings von Material aus den subphotosphärischen Schichten in die Photosphäre hinein. In den subphotosphärischen Schichten besteht eine strenge Korrelation zwischen Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur des stellaren

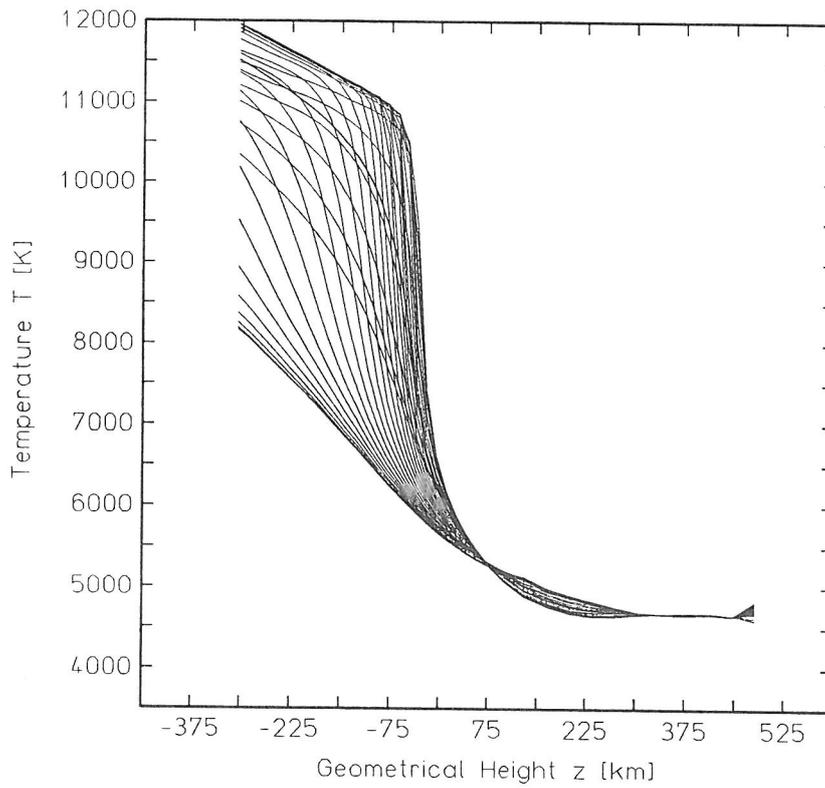


Abb. 43: Temperaturen als Funktion der Höhe für die 36 horizontalen Stützstellen des grauen Modells.

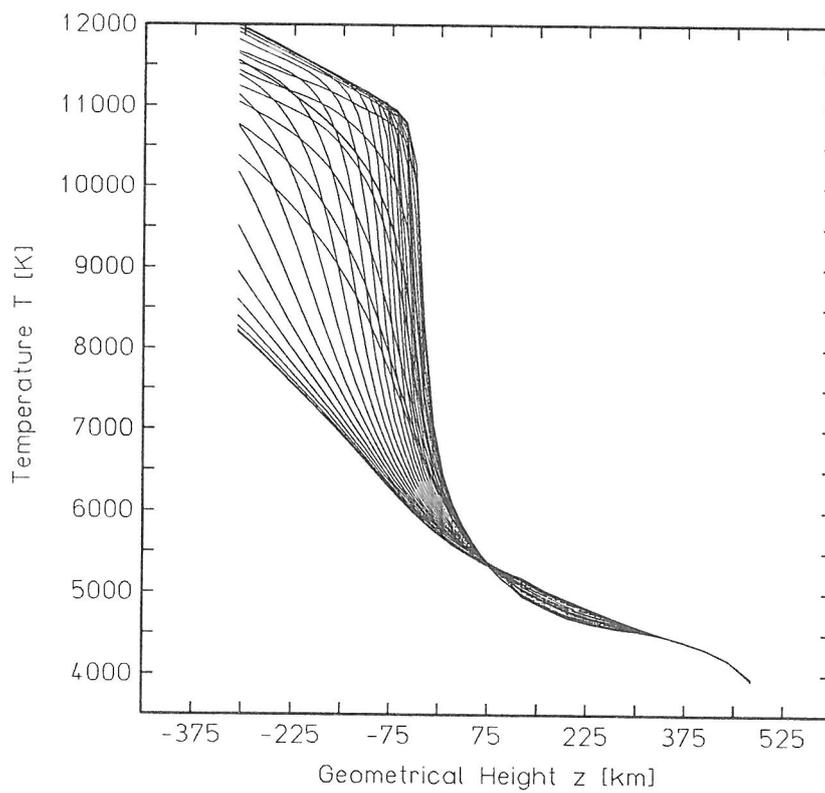


Abb. 44: Temperaturen als Funktion der Höhe für die 36 horizontalen Stützstellen des nichtgrauen Modells.

Plasmas: Heißes Gas steigt auf, kühles sinkt ab. Diese Beziehung kehrt sich oberhalb 75 km um. Das zuvor heißere (kühlere) Gas besitzt nun eine geringere (höhere) Temperatur als die Umgebung. Diese Inversion der Temperaturstruktur, die für das Overshooting-Phänomen charakteristisch ist, ist durch Beobachtungen von Spektrallinien in der Sonnenphotosphäre nachweisbar (HOLWEGER und KNEER, 1989).

Als Startmodell für den nichtgrauen Simulationslauf diente das graue Modell. Es stellt sich die Frage, wie schnell die Umstellung von der grauen auf die nichtgraue Temperaturstruktur abläuft. Betrachtet man die zeitliche Entwicklung des Systems, erweist sich, daß sich die Umstellung in der oberen Photosphäre in einem Zeitraum von  $\approx 50$  s — vergleichbar mit der radiativen Zeitskala in diesen Schichten — vollzieht. Die Umstellung in den subphotosphärischen Gebieten braucht  $\approx 400$  s, was etwa der thermischen Zeitskala der konvektiv instabilen Zone entspricht.

Zusammenfassend zeigen die stationären Modelle ein Verhalten, das man auf der Grundlage von 1-D Modellatmosphären hätte erwarten können. Wie gestaltet sich dies im instationären Fall?

### 6.2.2 Vorstellung der instationären Modelle

In diesem Abschnitt werden zwei *instationäre* solare Hydrodynamik-Modelle gegenübergestellt. Tabelle 5 faßt einige wesentliche Modellparameter zusammen. Für den nichtgrauen Strahlungstransport findet die in einem vorangegangenen Abschnitt beschriebene G2V-Opazitätstabelle mit 5 Frequenzsätzen Verwendung. In ihr sind auch graue Rosseland-Opazitäten gespeichert, die für das graue Modell benutzt werden. Im folgenden werden zeitlich und räumlich (horizontal) gemittelte Schichtungen präsentiert. Die Spanne, über die dabei zeitlich gemittelt wird, ist als „Zeitbasis“ aufgeführt. Sie ist im grauen Fall etwa doppelt so lang wie im nichtgrauen. In der Rubrik „Effektivtemperatur“ ist die mittlere Effektivtemperatur angegeben, die das Modell über den Mittelungszeitraum besitzt. In beiden Fällen ist die Abweichung vom Sollwert (5770 K) gering. In der letzten Zeile der Tabelle 5 ist der mittlere Intensitätskontrast im frequenzintegrierten Licht<sup>13</sup> ausgewiesen. Diese photometrische Größe ist im Hinblick auf den Vergleich mit beobachteten Kontrasten der solaren Granulation von Interesse.

Abb. 45 zeigt ein Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des grauen Modells. Sie ist mit der Abb. 42 (Seite 77) des nichtgrauen Modells zu vergleichen. Die Zeitpunkte, die für die Darstellungen herausgegriffen sind, sind so gewählt, daß die momentanen Strömungsfelder gewisse charakteristische Eigenschaften der Modelle widerspiegeln. Zunächst fällt gegenüber den *stationären Modellen* auf, daß die höhere Photosphäre keine homogene Temperaturstruktur besitzt. Dies ist eine Konsequenz des wesentlich stärkeren Overshootings in den instationären Modellen. Es führt zu erheblichen Geschwindigkeiten bis in die höchsten photosphärischen Schichten. Die Maximalgeschwindigkeiten, die in den Abbildungen 42 und 45 dargestellt sind, sind nahezu identisch, so daß ein direkter visueller Vergleich beider Geschwindigkeitsfelder möglich ist. Die beiden instationären Modelle zeigen in den subphotosphärischen Schichten eine ganz ähnliche Struktur, großräumige langsame Aufwärts- und schnelle konzentrierte Abwärtsströmungen. Starke Unterschiede aufgrund des Strahlungstransportes, die man an Momentbildern ablesen könnte, sind auch eigentlich nicht zu erwarten, da in den subphotosphärischen Gebieten der graue Strahlungstransport den radiativen Energieaustausch in guter Näherung wiedergibt.

<sup>13</sup>Dieser Wert entspricht in der Sonnenphotosphäre ungefähr dem monochromatischen Kontinuumskontrast bei 6200 Å.

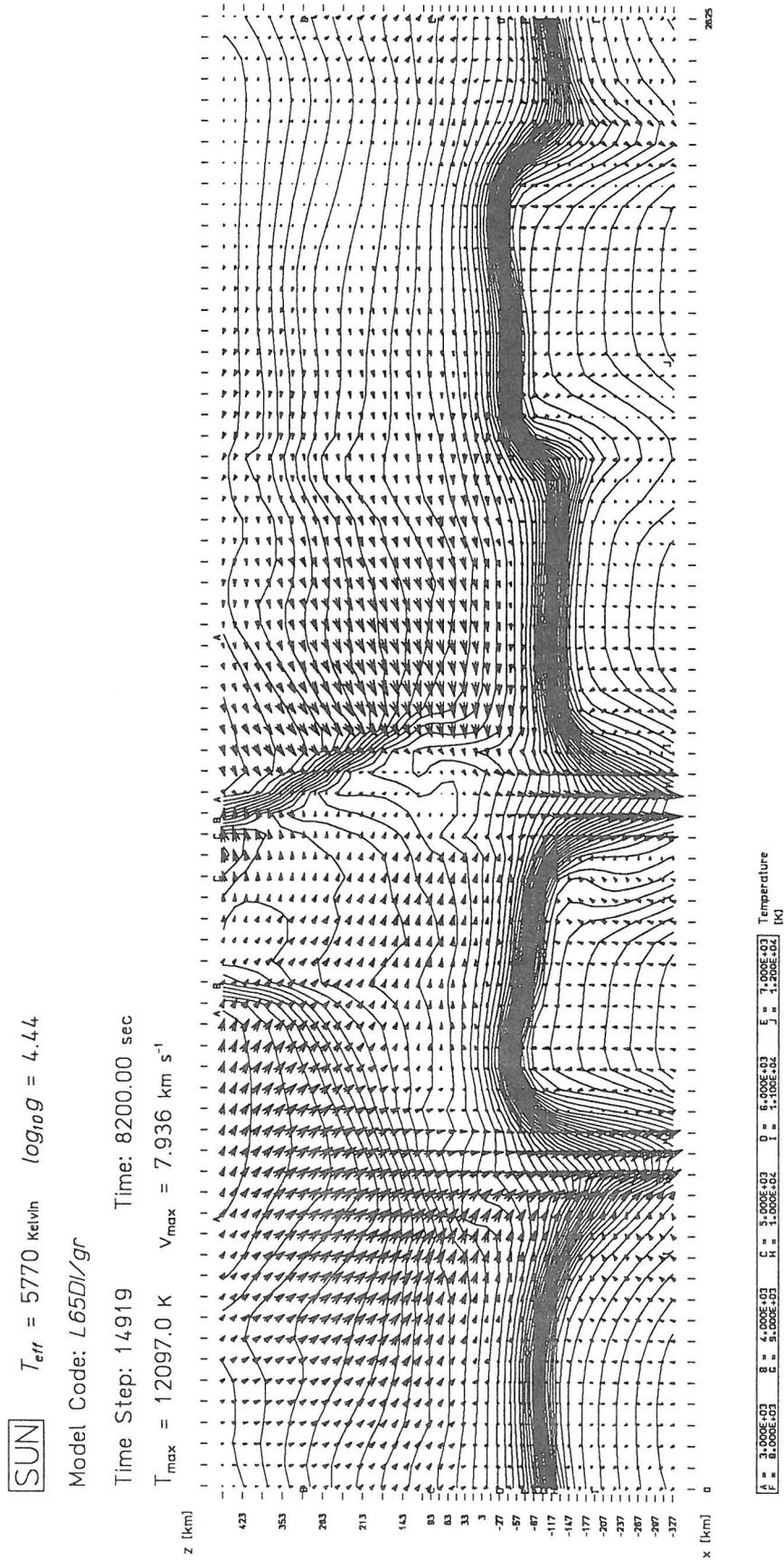


Abb. 45: Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des grauen Hydrodynamik-Sonnenmodells. Es ist mit Abb. 42 (Seite 77) zu vergleichen. Zur Erklärung der Darstellung siehe die im Text gegebenen Erläuterungen zu Abb. 42.

Modellcode	L65D01I	L65DJK
$T_{\text{eff}}$ (soll)	5770 K	5770 K
$\lg g$	4.44	4.44
Geometrie	kartesisch	kartesisch
Seitliche Randbedingung	periodisch	periodisch
Unterer Rand	offen	offen
Oberer Rand	offen	offen
Horizontale Ausdehnung	2625 km	2625 km
Vertikale Ausdehnung	785 km	785 km
Strahlungstransport	grau	nichtgrau
Frequenzpunkte	1	5
Opazitätstabelle	g2v-opta	g2v-opta
Zeitbasis	9840 s	5322 s
$T_{\text{eff}}$ (ist)	5769 K	5754 K
Einzelbildkontrast	17.8 %	17.0 %

Tabelle 5: Modellparameter der beiden instationären hydrodynamischen Sonnenmodelle. Der erste Datenblock enthält den Modellnamen und den spezifizierten Spektraltyp, der zweite geometrische Parameter und Randbedingungen, der dritte Eigenschaften des verwendeten Strahlungstransportes, der vierte die zur Mittelung verwendete Zeitspanne und der fünfte Angaben zur Effektivtemperatur, die das Modell über den angegebenen Zeitraum besitzt, sowie zum mittleren (RMS) Intensitätskontrast im frequenzintegrierten Licht.

Die ausgeprägte Asymmetrie von Auf- und Abströmung kann mit Hilfe des sogenannten „buoyancy braking“ (HURLBURT ET AL., 1984) erklärt werden: Im zeitlichen Mittel muß sich das Strömungsfeld aufgrund der Massenerhaltung so verhalten, daß aufsteigendes Material abgebremst, umgelenkt und schließlich wieder in tiefere Schichten befördert wird. Über Gebieten, in denen Material aufsteigt oder absinkt, muß der Druck gegenüber der Umgebung erhöht sein, um im ersten Fall die Abbremsung des aufsteigenden und im zweiten die Beschleunigung des absinkenden Gases bewirken zu können. Zudem muß die Bewegungsrichtung des aufsteigenden Gases von bevorzugt vertikal in horizontal, beim Absinken von bevorzugt horizontal in vertikal umgelenkt werden. Die Wirkung der Druckmaxima ist unterschiedlich. Über Gebieten, in denen Gas aufsteigt, wirkt das lokale Druckmaximum dem Aufsteigen entgegen, während es über Gebieten, in denen Gas abströmt, das Absinken beschleunigt. Diese asymmetrische Wirkungsweise bewirkt die unterschiedlichen Flächenanteile und Geschwindigkeiten des auf- bzw. absinkenden Gases. Anhand stationärer hydrodynamischer Modelle ist dieser Effekt bei STEFFEN ET AL. (1989) eingehender diskutiert.

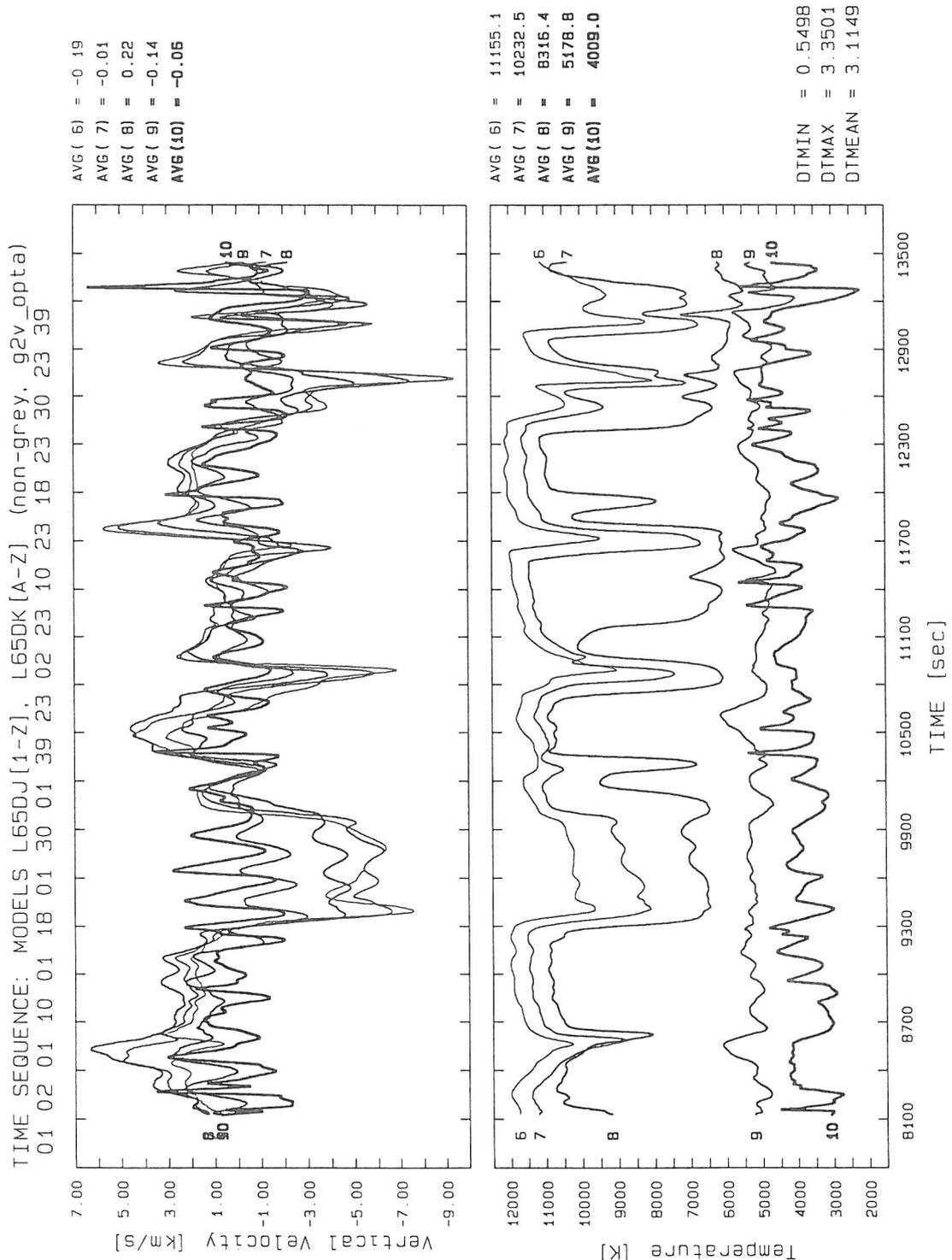
In der Photosphäre stellt sich die Situation in beiden Modellen anders dar. Betrachtet man die Temperaturen am oberen Rand, zeigt das *graue* Modell *geringere* Temperaturen als das *nichtgraue*. Wir werden in den gemittelten Schichtungen sehen, daß dies kein Zufall ist. Klassische 1-D Modellatmosphären liefern stets das Bild, daß in der Photosphäre die *graue* Schichtung heißer als die *nichtgraue* ist. Geht man von dieser Betrachtungsweise aus, erscheint das hier präsentierte Ergebnis überraschend. Erklärt werden kann es aus der Tatsache heraus, daß wir in der Photosphäre der hydrodynamischen Modelle *kein Strahlungsgleichgewicht* vorliegen haben, das in 1-D Atmosphären aber stets zur Ableitung der Temperaturstruktur vorausgesetzt wird.

Die photosphärischen Strömungen verlaufen bevorzugt in horizontaler Richtung. Maximalwerte der Geschwindigkeit treten während der Zeitentwicklung häufig über

den Rändern der Abströmzonen auf. Die sich dort in horizontaler Richtung ausbildenden starken Geschwindigkeitsgradienten können zusammen mit den hohen Geschwindigkeitsbeträgen, die in der Nähe der lokalen Schallgeschwindigkeit liegen können, zur Ausbildung von Stoßfronten führen. Ein solcher Schock ist in der Mitte von Abb. 45 zu erkennen: Er fällt durch den starken Temperaturgradienten auf. Betrachtet man die Zeitentwicklung grauer und nichtgrauer Modelle, so zeigt sich, daß im nichtgrauen Fall diese Schockereignisse deutlich seltener auftreten und zudem schwächer ausfallen. Dies ist verständlich wegen der effektiveren thermischen Kopplung, den der nichtgraue Strahlungstransport in der Photosphäre bewirkt. Im grauen Fall ist die Opazität so klein, daß eine lokale Abweichung der mittleren Intensität von der Quellfunktion  $J - B$  nur geringe Heiz- oder Kühlwirkung  $\kappa(J - B)$  zur Folge hat. Krasse Temperaturgegensätze, wie sie in Stoßfronten auftreten, werden nicht so effektiv egalisiert wie im nichtgrauen Fall. Dort gibt es Frequenzpunkte, deren Opazität groß genug ist, einen effektiven Energieaustausch zwischen Regionen unterschiedlicher Temperatur zu bewirken, und damit der Ausbildung von starken Schockfronten entgegenwirken.

Abb. 46 zeigt die zeitliche Entwicklung des nichtgrauen hydrodynamischen Modells an fünf ausgewählten Orten. Dargestellt sind der Verlauf von Temperatur und der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit. Der dargestellte Zeitraum entspricht dem, der zur Berechnung der mittleren Schichtung zugrundegelegt ist. Die fünf Orte liegen bei einer festen horizontalen Position in unterschiedlichen Höhen. Punkt 6 liegt am tiefsten, in der Nähe des unteren Randes, Punkt 10 am höchsten, knapp unterhalb des oberen Randes. Entsprechend verhalten sich die Temperaturen. Punkt 6 zeigt im Mittel die höchsten, Punkt 10 die niedrigsten Temperaturen. Abb. 46 soll vornehmlich den instationären Charakter der Strömung veranschaulichen. Betrachtet man die Vertikalgeschwindigkeit, so wechselt in den tieferen Schichten immer wieder das Vorzeichen. Einmal befindet sich am betrachteten Ort eine Auf-, einmal eine Abströmung. Abströmungen werden von niedrigen Temperaturen begleitet, Aufströmungen von hohen. Insgesamt bietet sich ein irreguläres, chaotisches Bild, was die zeitliche Entwicklung des Systems betrifft. Es unterstreicht die turbulente Natur des Strömungsfeldes, die sich aufgrund der niedrigen Viskosität des stellaren Materials einstellt.

Die obige Aussage ist etwas einzuschränken. In der Zeitentwicklung der Modelle zeigen sich Strömungen mit oszillatorischem Charakter. Diese Schwingungen besitzen Perioden im Bereich 180 s–260 s. Es ist noch nicht eindeutig geklärt, ob die Oszillationen Eigenschwingungen darstellen, bei dem die beobachteten Frequenzen durch die Eigenfrequenzen des Simulationsvolumens gegeben sind. Alternativ könnte ein Resonanzphänomen in Verbindung mit der akustischen Cut-Off-Frequenz oder der Brunt-Väisälä-Frequenz der Atmosphärenschichtung für die gefundenen Schwingungen verantwortlich sein (Krüss, 1991). Dazu stellt sich die Frage nach der Anfachung der in Hydrodynamik-Rechnungen auftretenden Oszillationen. Hier bieten sich zwei mögliche Szenarien an: Zum einen eine stochastische Anregung durch Druckstörungen, die durch die Konvektion erzeugt werden, zum anderen eine Selbsterregung durch geeignete Wechselwirkung der Schwingung mit dem Strahlungsfeld. Bisher haben Modelle, in denen der Strahlungstransport nichtgrau beschrieben wird, keine neuen Aufschlüsse in diesem Zusammenhang gebracht. Die Problematik wird daher im folgenden weitgehend ausgeklammert.



**Abb. 46:** Zeitentwicklung des nichtgrauen hydrodynamischen Modells an fünf ausgewählten Orten (Numeriert von 6 bis 10). Dargestellt sind die Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur. Die fünf Orte liegen an einer festen horizontalen Position in unterschiedlichen Tiefen. Punkt 6 liegt in der Nähe des unteren, Punkt 10 in der Nähe des oberen Randes. (In Abb. 42 befinden sich Marken an der x- und z-Achse. Numeriert man sie von links nach rechts bzw. von unten nach oben, liegen die fünf Orte an den Positionen (23,2), (23,10), (23,18), (23,30) und (23,39).) Zusätzlich vermerkt sind die zeitlichen Mittelwerte der Größen am jeweiligen Ort.

### 6.2.3 Mittlere Schichtungen der instationären Modelle

Abb. 47 zeigt die auf der optischen Skala gemittelte Temperaturstruktur der beiden instationären Modelle. Das nichtgraue Modell ist mit durchgezogenen Linien eingezeichnet, das graue mit gestrichelten. Jedes Modell ist durch drei Kurven vertreten. Die mittlere der drei Kurven stellt den Verlauf des Mittelwertes<sup>14</sup>  $E[T]$  der Temperatur dar. Die beiden anderen Kurven entsprechen jeweils  $E[T] \pm \sigma[T]$ , wobei  $\sigma[T]$  die Standardabweichung der Temperaturverteilung in der betrachteten Tiefe ist. Der Unterschied zwischen den beiden äußeren Kurven ist ein Maß für die räumlichen *und* zeitlichen Fluktuationen um den Mittelwert. Die Standardabweichung schätzt hier *nicht* die Sicherheit des Mittelwertes ab. Die Art, wie die Standardabweichung dargestellt ist, könnte nahelegen, daß die Temperaturverteilung um den Mittelwert symmetrisch ist. Es sei betont, daß dies nicht der Fall zu sein braucht.

Um die Signifikanz der Unterschiede in den Temperaturschichtungen nach Abb. 47 einschätzen zu können, ist das Zeitintervall, für das die mittleren Schichtungen berechnet worden sind, geteilt worden. Für jedes der Teilintervalle sind dann entsprechende mittlere Schichtungen bestimmt und verglichen worden. Bei diesem Test erweisen sich die Mittelwerte in den Gebieten  $\lg \tau_R < 1.0$  als stabil, in tieferen Bereichen unterliegen sie noch leichten Schwankungen. Die Unterschiede der Schichtungen in den Gebieten  $\lg \tau_R > 1.0$  sind demnach als nicht signifikant, in den Gebieten  $\lg \tau_R < 1.0$  als signifikant zu betrachten.

Die Temperaturstruktur beider Modelle ist nach Abb. 47 für  $\lg \tau_R > 0.5$  unter Berücksichtigung der verbleibenden Unsicherheiten in den mittleren Schichtungen identisch. In den Gebieten  $\lg \tau_R < 0.5$  zeigen sich merkbare Unterschiede. So ist die graue Schichtung am äußeren Rand der Atmosphäre um  $\approx 250$  K *kühler* als die nichtgraue.

Abb. 48 zeigt analog Abb. 47 die mittleren radiativen Heizraten gemäß Gleichung (5.1) in der Photosphäre beider Modelle. Für optische Tiefen  $\lg \tau_R < -1.25$  sind sie für beide Modelle positiv. Dies bedeutet, daß die Temperaturen in diesen Gebieten im Mittel unterhalb der Temperatur der Strahlungsgleichgewichtsschichtung liegen. Die Strahlung versucht im grauen wie im nichtgrauen Modell die Schichtung aufzuheizen, so daß sie sich der Strahlungsgleichgewichtsschichtung annähert. Qualitativ stimmt das Bild überein, quantitativ zeigen sich in höheren Photosphäre  $\lg \tau_R < -1.5$  drastische Unterschiede. Das graue Modell weist mit abnehmender optischer Tiefe immer geringere Heizraten auf. Zudem verschwinden die Fluktuationen der Heizrate, was im nichtgrauen Modell in weit geringerem Maße der Fall ist. Nach Abb. 47 zeigen beide Modelle in der Photosphäre vergleichbare Temperaturfluktuationen, damit auch vergleichbare Variationen in der Quellfunktion. Offenbar führt dies im grauen Modell nicht zu entsprechenden Schwankungen im Strahlungsaustausch. Mit zunehmender Höhe verschwindet die Kopplung zwischen dem Strahlungsfeld und dem stellaren Gas. Dies Verhalten ist aus der Tatsache zu erklären, daß die im grauen Strahlungstransport verwendeten Rosseland-Opazitäten mit abnehmender optischer Tiefe rasch sehr klein werden, der Heizungsterm  $\kappa(J - B)$  geht gegen null. Am äußeren Rand der Atmosphäre ist die graue Temperaturschichtung um 1400 K *kühler* als eine entsprechende Strahlungsgleichgewichtsschichtung. Trotzdem reicht diese Temperaturdifferenz nicht aus, um eine effektive Aufheizung durch Strahlung zu bewerkstelligen.

Im nichtgrauen Modell stellen sich die Verhältnisse weniger extrem dar. Die Fluk-

<sup>14</sup>In dieser Arbeit werden die Begriffe „Mittelwert“ und „Erwartungswert“ gleichbedeutend gebraucht.

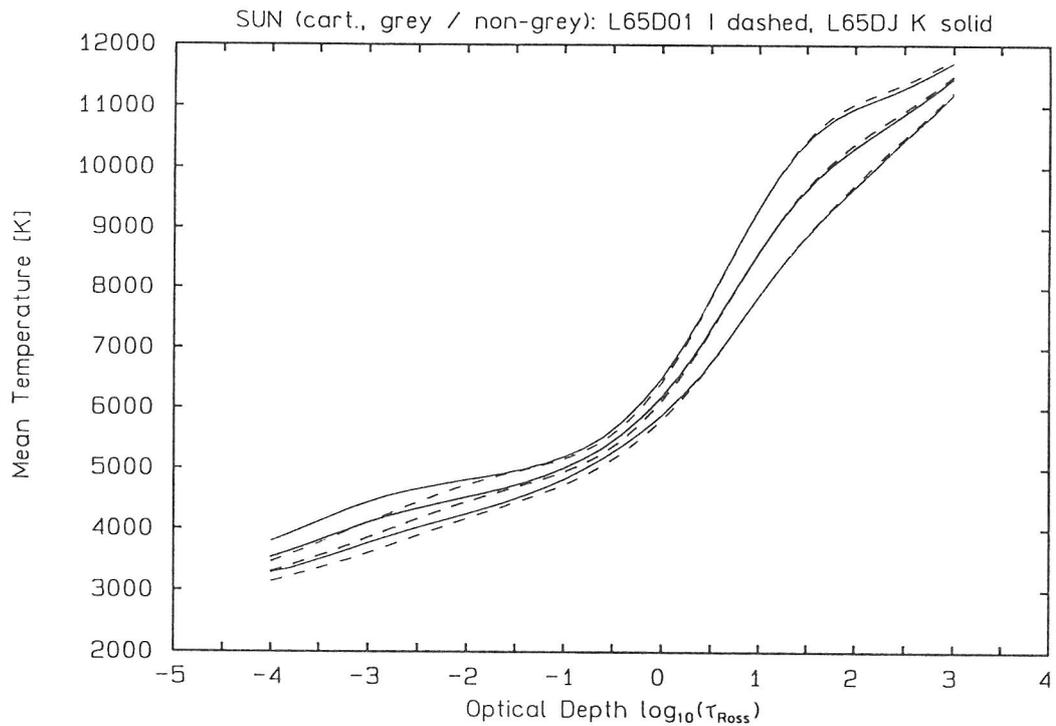


Abb. 47: Räumlich und zeitlich gemittelte Temperaturschichtungen des grauen (gestrichelte Kurven) und nichtgrauen (durchgezogene Kurven) Sonnenmodells. Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Temperatur in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[T] \pm \sigma[T]$  und geben ein Maß für die auftretenden Temperaturschwankungen.

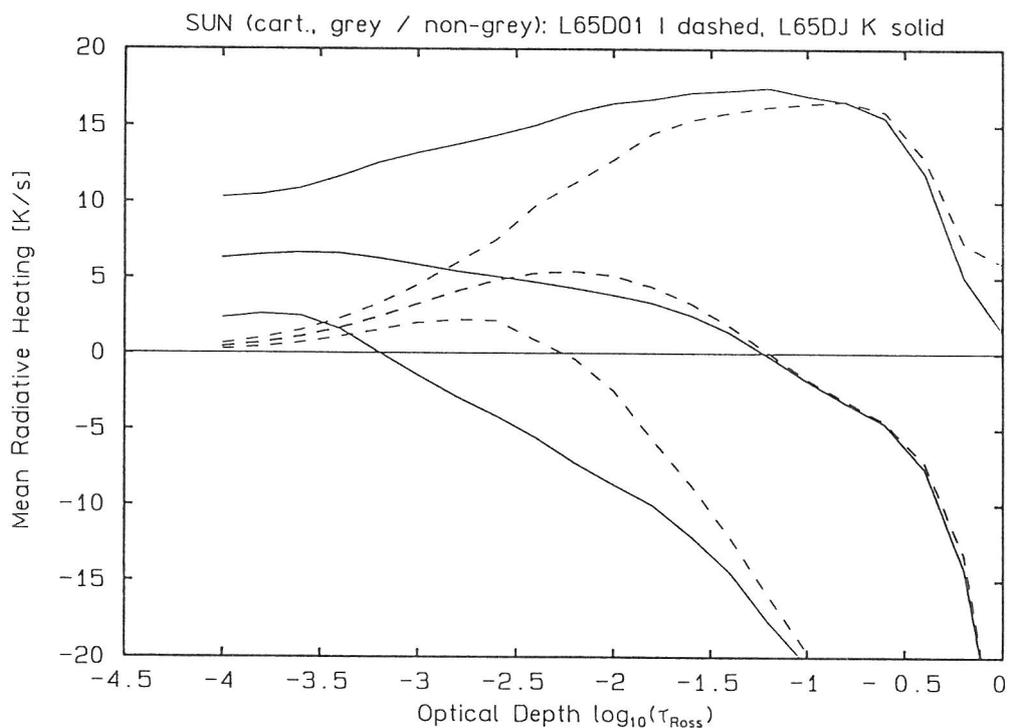


Abb. 48: Räumlich und zeitlich gemittelte radiative Heizraten des grauen (gestrichelte Kurven) und nichtgrauen (durchgezogene Kurven) Modells gemäß Gleichung (5.1). Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Rate in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[R] \pm \sigma[R]$  und geben ein Maß für die auftretenden Fluktuationen der Heizrate.

tuationen in der Heizrate nehmen mit wachsender Höhe ebenfalls ab. Die Abnahme ist aber zum größten Teil durch die abnehmende Temperaturempfindlichkeit der Kirchhoff-Planck-Funktion gegeben. So wäre allein deshalb zwischen  $\lg \tau_R = -2.0$  und  $\lg \tau_R = -4.0$  eine Abnahme der Fluktuationen um einen Faktor 2.4 zu erwarten, aus Abb. 48 erhält man einen Faktor 3.1. Bis  $\lg \tau_R = -4.0$  zeigt sich eine merkliche mittlere Heizrate. Um sie aufrecht zu erhalten, ist bei  $\lg \tau_R = -4.0$  ein Temperaturunterschied von 600 K zur nichtgrauen Strahlungsgleichgewichtsschichtung nötig (siehe Abb. 51). Auch das nichtgraue Hydrodynamik-Modell besitzt also eine photosphärische Temperaturschichtung, die deutlich kühler als die entsprechende Strahlungsgleichgewichtsschichtung aus statischen Modellatmosphären ist.

Betrachtet man die Energiegleichung (2.5) und sieht von den kleinen Termen ab, die die viskosen Effekte ( $D_{\text{vis}}$ ,  $D_{\text{mix}}$ ) beschreiben, so muß im zeitlichen Mittel die radiative Heizung durch eine entgegenwirkende Entropieadvektion ausgeglichen werden. Das starke Overshooting in den instationären Modellen führt zu einer *konvektiven Kühlung* der Photosphäre. Das Overshooting befördert Materie niedriger Entropie in Bereiche, in denen die Entropie im Fall des Strahlungsgleichgewichts größer wäre. Wäre keine Strahlung vorhanden, erhielte man dabei eine adiabatische Temperaturschichtung. Sie wäre in der Photosphäre erheblich kühler als die Strahlungsgleichgewichtsschichtung. Die Strahlung wirkt der Einstellung einer adiabatischen Schichtung entgegen. Insgesamt ist die photosphärische Temperaturstruktur gegeben durch eine *Balance zwischen konvektiver Kühlung und radiativer Heizung*. Für eine weitere Diskussion dieses Effektes siehe NORDLUND, 1985. Die konvektive Kühlung durch Overshoot wird in klassischen 1-D Modellatmosphären, in denen der konvektive Energietransport mit Hilfe der Mischungswegtheorie wiedergegeben wird, nicht erfaßt. Sie müssen deshalb in der Photosphäre stets höhere Temperaturen liefern als Hydrodynamik-Modelle.

Wir haben gesehen, daß die Strömungen, die in den Hydrodynamik-Simulationen auftreten, die Temperaturstruktur der Modelle erheblich beeinflussen. Daher soll nun das mittlere Geschwindigkeitsfeld betrachtet werden. Die Abbildungen 49 und 50 zeigen die RMS-Mittel<sup>15</sup> der horizontalen bzw. vertikalen Geschwindigkeitskomponente. Die zeitliche Stabilität der Mittelwerte, die in den Abbildungen dargestellt sind, ist nicht so gut wie im Fall der Temperatur und der radiativen Heizrate. Die Schwankungen liegen in der gleichen Größenordnung wie die Unterschiede, die in den Abbildungen 49 und 50 zwischen den Geschwindigkeiten des grauen und nichtgrauen Modells vorhanden sind. Die Unterschiede zwischen beiden Modellen sollten daher eher als ein Maß für die Unsicherheiten in den Angaben verstanden werden.

Die Abbildungen 49 und 50 zeigen, daß in der Photosphäre horizontale Strömungen vorherrschen, in Gebieten  $\lg \tau_R > 0.5$  vertikale. In der Photosphäre liegen typische Vertikalgeschwindigkeiten bei 1.3 km/s, Horizontalgeschwindigkeiten bei etwa 3 km/s. Vergleicht man dies mit Turbulenzgeschwindigkeiten, die aus spektroskopischen Untersuchungen abgeleitet sind (HOLWEGGER ET AL., 1978), findet man für die vertikalen Geschwindigkeiten eine gute Übereinstimmung. Die horizontalen Mittelwerte aus den Hydrodynamik-Simulationen fallen deutlich zu groß aus. Der Grund hierfür kann in der zweidimensionalen kartesischen Geometrie der Strömung liegen, die in den Hydrodynamik-Simulationen vorgeschrieben wird. Die Strömung besitzt im zweidimensionalen kartesischen Fall weniger Freiheiten für den horizontalen Abtransport des aufsteigenden Materials. Ihr steht nur eine horizontale Richtung zur Verfügung. In drei Dimensionen kann der Transport in zwei Richtungen erfol-

<sup>15</sup>RMS steht für Root-Mean-Square. Das RMS-Mittel ist die Wurzel aus dem mittleren Quadrat einer Größe.

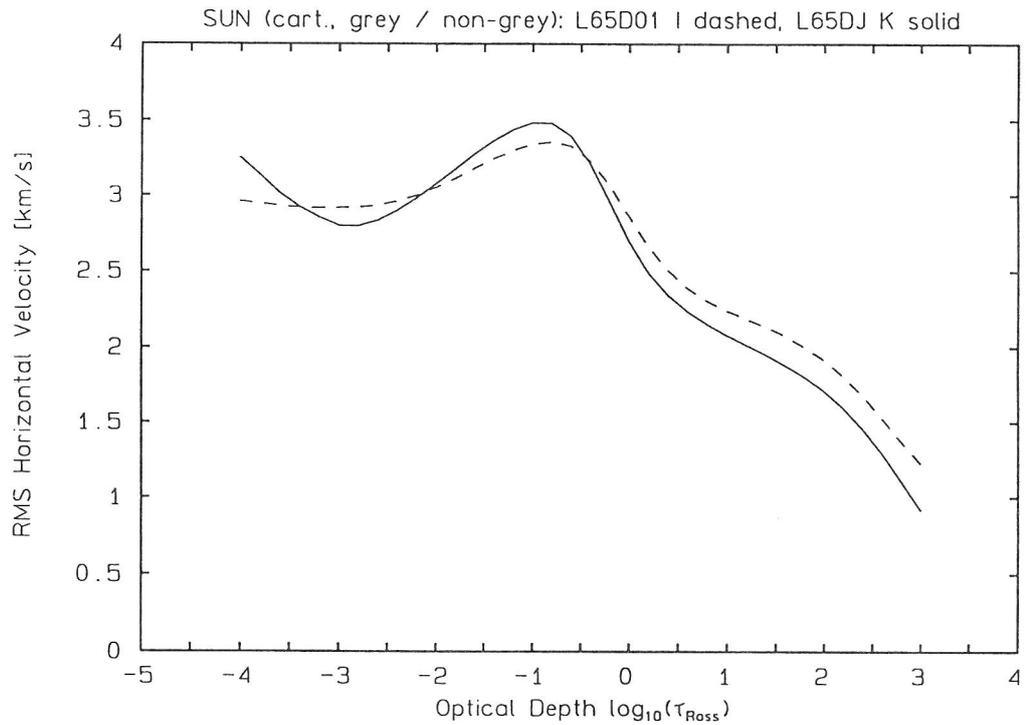


Abb. 49: Räumliches und zeitliches RMS-Mittel der horizontalen Geschwindigkeitskomponente für das graue (gestrichelte Kurve) und das nichtgraue (durchgezogene Kurve) Modell.

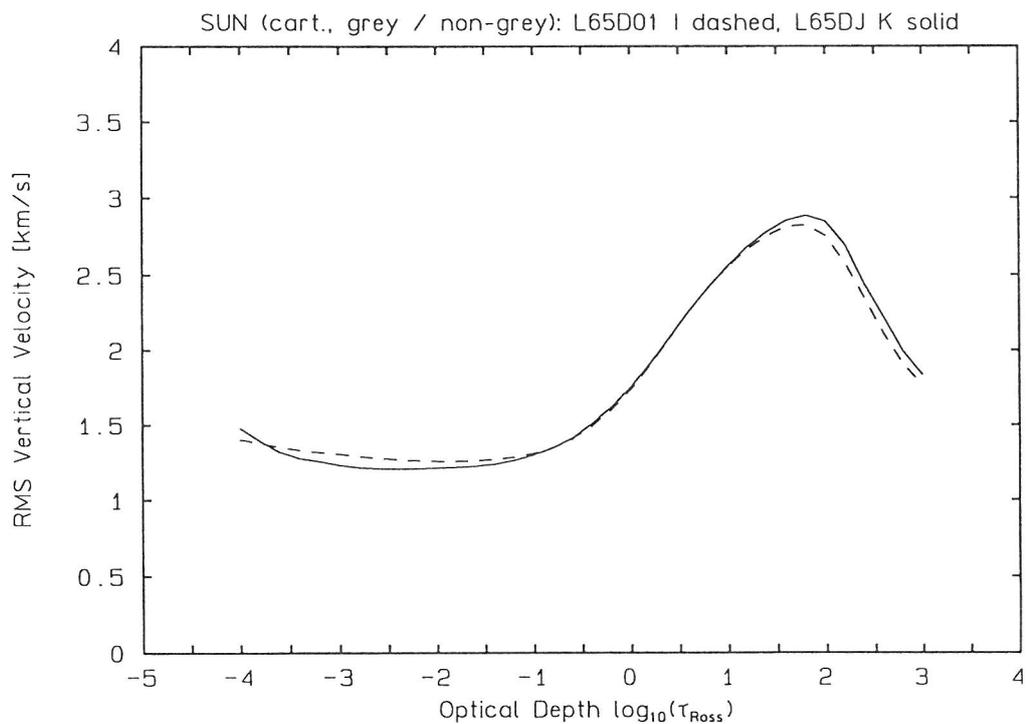


Abb. 50: Räumliches und zeitliches RMS-Mittel der vertikalen Geschwindigkeitskomponente für das graue (gestrichelte Kurve) und das nichtgraue (durchgezogene Kurve) Modell.

gen. Nimmt man an, daß ein bestimmter vertikaler Massenfluß nötig ist, um einen vorgegebenen konvektiven Energiefluß zu gewährleisten, so müssen die horizontalen Strömungsgeschwindigkeit in zwei Dimensionen schneller als in drei Dimensionen sein. Zu bemerken ist, daß dieses Argument für zweidimensionale *zylindrische* Geometrie nicht in jedem Fall zutrifft. Betrachtet man eine Konfiguration, bei der Material in der Nähe der Symmetrieachse aufsteigt, so kann das Material an der Oberfläche horizontal in alle Richtungen abströmen.

#### 6.2.4 Vergleich zwischen HD- und ATLAS6-Modellen

Mittlere HD-Schichtungen, wie sie im vorangehenden Abschnitt präsentiert werden, bieten sich für einen Vergleich mit klassischen 1-D Modellatmosphären an. Als 1-D Modelle werden wieder ATLAS6-Schichtungen verwendet. Es geht in diesem Abschnitt um zwei Fragen: Inwieweit unterscheiden sich Temperaturschichtungen unter Zugrundelegung photosphärischen Strahlungsgleichgewichts von Schichtungen unter konsistenter Einbeziehung hydrodynamischer Effekte? Und inwieweit kann die Mischungswegtheorie den konvektiven Energietransport in den subphotosphärischen Gebieten wiedergeben? Um einen möglichst direkten Vergleich zu ermöglichen, wird der Strahlungstransport im HD- wie im ATLAS6-Code in der G2V-Mehrbandbeschreibung behandelt.

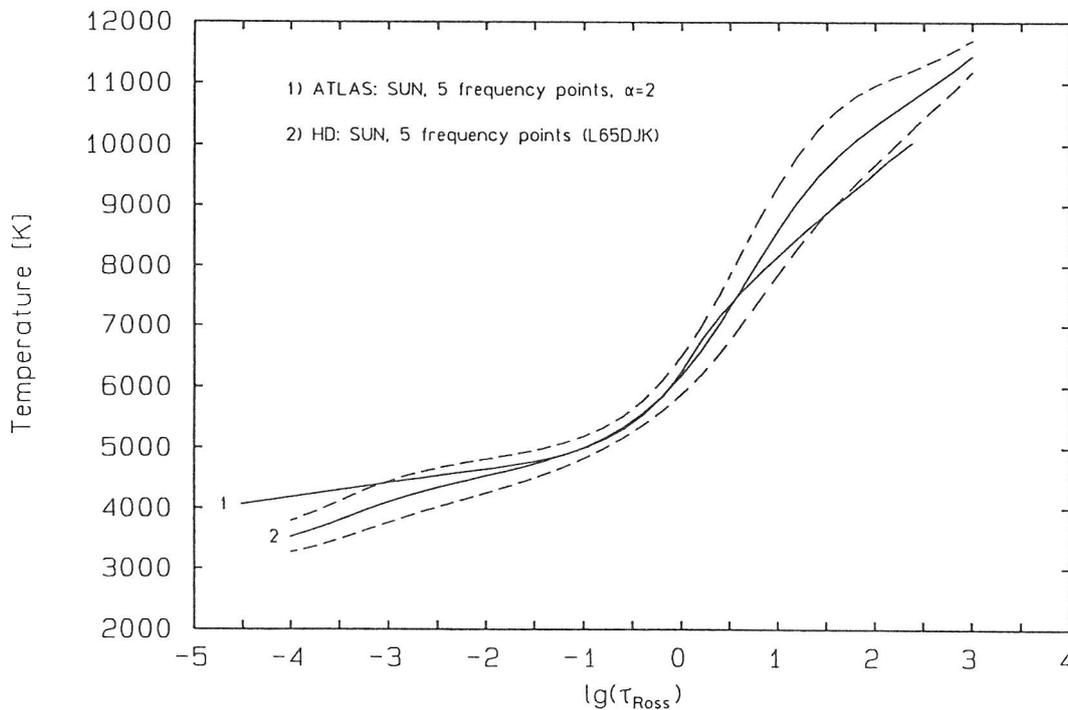


Abb. 51: HD- und ATLAS6-Temperaturschichtung für die Sonne. Beide Schichtungen sind unter Zugrundelegung der G2V-Mehrbandbeschreibung (5 Frequenzpunkte) berechnet. Als Mischungsweg  $l$  bei der Bestimmung der ATLAS6-Schichtung (Kurve 1) wird ein Wert von  $l/H_p = 2$  verwendet. Zusätzlich ist für die HD-Schichtung (Kurve 2) die Schwankungsbreite der Temperatur (gestrichelte Kurven) eingezeichnet.

Abb. 51 stellt die Temperaturschichtung des nichtgrauen solaren HD-Modells und des zugehörigen ATLAS6-Modells gegenüber. Bei der Berechnung des ATLAS6-Modells ist ein Mischungsweg  $l/H_p = 2$  ( $H_p$ : lokale Druckskalenhöhe) zugrundegelegt. Für die HD-Schichtung ist zusätzlich die Schwankungsbreite der Temperatur eingezeichnet. In großer optischer Tiefe ( $\lg \tau_R = 2.4$ ) ist die HD-Schichtung heißer als

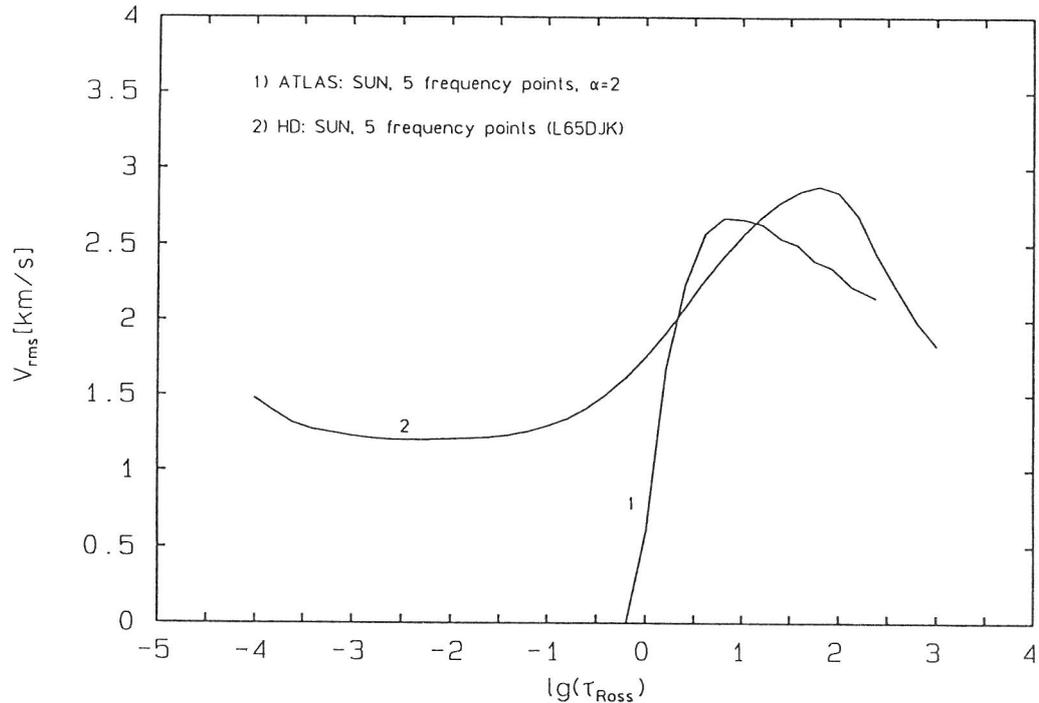


Abb. 52: Konvektive Geschwindigkeiten nach Mischungswegtheorie (Kurve 1,  $l/H_p = 2$ ) aus einem ATLAS6-Modell und RMS-Mittel der Vertikalgeschwindigkeit des nichtgrauen HD-Modells (Kurve 2). In beiden Fällen ist für den Strahlungstransport die G2V-Mehrbandbeschreibung (5 Frequenzpunkte) zugrundegelegt.

die ATLAS6-Schichtung. Die Temperatur der HD-Schichtung entspricht derjenigen, die ein ATLAS6-Mischungswegmodell mit  $l/H_p = 0.95$  in dieser Tiefe besitzt. Ab  $\lg \tau_R = 0.55$  wird die HD-Schichtung zunächst kühler, ab  $\lg \tau_R = -0.2$  geringfügig heißer und ab  $\lg \tau_R = -1.2$  schließlich kühler als die ATLAS6-Schichtung. Am oberen Rand bei  $\lg \tau_R = -4.0$  beträgt der Temperaturunterschied etwa 600 K. Die Temperatur der ATLAS6-Schichtung in dieser Tiefe ist unabhängig vom Mischungsweg. Es ist festzuhalten:

- In der höheren Photosphäre ist die HD-Schichtung deutlich kühler als die ATLAS6-Schichtung.
- Der Verlauf der Temperatur der HD-Schichtung — auch wenn man sich auf optische Tiefen  $\lg \tau_R > -1$  beschränkt — kann nicht durch eine ATLAS6-Schichtung unter Verwendung eines bestimmten tiefenunabhängigen Mischungswegparameters  $\alpha = l/H_p$  wiedergegeben werden.
- Der mittlere HD-Temperaturgradient ist bei  $\lg \tau_R = 0$  etwas flacher als der der ATLAS6-Schichtung.
- In der tieferen Photosphäre  $-1.5 < \lg \tau_R < 0.0$  stimmen die Schichtungen bis auf 70 K überein.

Die Mischungswegtheorie liefert also nur eine grobe Abschätzung der Temperaturstruktur in den subphotosphärischen Gebieten. Die Wiedergabe der Effizienz des konvektiven Energietransportes ist ungenügend. Strahlungsgleichgewichtsatmosphären liefern eher eine obere Grenze für die photosphärischen Temperaturen.

Abb. 52 stellt die in den Modellen auftretenden Geschwindigkeiten gegenüber. Die Mischungswegtheorie kann die photosphärischen Geschwindigkeiten, die im HD-

Modell auftreten, prinzipiell nicht erfassen. Die Geschwindigkeiten in den subphotosphärischen Schichten werden durch das Mischungswegmodell nur grob wiedergegeben. So liegt das Maximum der konvektiven Geschwindigkeit in einer deutlich geringeren optischen Tiefe als das Maximum der mittleren Geschwindigkeit im HD-Modell. Bei dem Vergleich ist zu bedenken, daß die Höhe des Maximums — nicht aber seine optische Tiefe — noch stark von der Wahl des Mischungsweges abhängt; ein Mischungsweg  $\alpha = 1$  liefert eine Maximalgeschwindigkeit von 2 km/s, ein Mischungsweg  $\alpha = 3$  eine von 3.1 km/s.

Im Abschnitt „Fazit“ wird auf die Frage der Randtemperatur, die aus den hydrodynamischen Simulationen sehr kühl herauskommt, nochmal von der Beobachtungsseite her eingegangen.

### 6.3 Spektraltyp F5V

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse für die hydrodynamischen Simulationen der Sternatmosphären vom Spektraltyp F5V präsentiert. Es wird dabei analog zur Sonne verfahren, was einen Vergleich mit den solaren Resultaten ermöglicht.

#### 6.3.1 Vorstellung der Modelle

Tabelle 6 faßt wieder die wesentlichen Parameter der beiden Vergleichsmodelle für die F5V-Atmosphäre zusammen. Die *instationären* Modelle besitzen im Gegensatz zum solaren Beispiel *zylindrische* Geometrie. Der Strahlungstransport wird mit Hilfe der F5V-Opazitätstabelle beschrieben. Der graue Strahlungstransport verwendet rein Rosselandsche Opazitäten.

Modellcode	L63DB	L63DC
$T_{\text{eff}}$ (soll)	6500 K	6500 K
$\lg g$	4.44	4.44
Geometrie	zylindrisch	zylindrisch
Seitliche Randbedingung	geschlossen	geschlossen
Unterer Rand	offen	offen
Oberer Rand	offen	offen
Radius	1479 km	1479 km
Vertikale Ausdehnung	885 km	885 km
Strahlungstransport	grau	nichtgrau
Frequenzpunkte	1	5
Opazitätstabelle	f5v-opta	f5v-opta
Zeitbasis	4784 s	4644 s
$T_{\text{eff}}$ (ist)	6497 K	6498 K
Einzelbildkontrast	17.5 %	16.4 %

Tabelle 6: Modellparameter der beiden instationären hydrodynamischen F5V-Modelle. Der erste Datenblock enthält den Modellnamen und den spezifizierten Spektraltyp, der zweite geometrische Parameter und Randbedingungen, der dritte Eigenschaften des verwendeten Strahlungstransportes, der vierte die zur Mittelung verwendete Zeitbasis und der fünfte Angaben zur Effektivtemperatur, die das Modell über den angegebenen Zeitraum besitzt, sowie zum mittleren (RMS) Intensitätskontrast.

Die Abb. 53 zeigt ein Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des grauen, Abb. 54 des nichtgrauen Modells. Im Unterschied zu den bisherigen Strömungsbildern (etwa Abb. 42) muß man sich hier die Strukturen aufgrund der Zylindergeometrie der Modelle um die markierte Achse rotationssymmetrisch

ergänzt denken. Die Strömung ist in beiden Modellen instationär: Relativ ruhige Phasen, in denen die Strömungstopologie der nach Abb. 53 entspricht, wechseln sich mit Teilungsepisoden ab, in denen die Strömungstopologie etwa der in Abb. 54 entspricht. Während der zeitlichen Entwicklung überwiegen ruhige Phasen. Die Teilungsepisoden werden dadurch beendet, daß einer der Ringe, in denen Material aufsteigt, sich auf Kosten des anderen ausdehnt. Es handelt sich dabei weniger um ein Verschmelzungs- als vielmehr Verdrängungsprozeß. Trotz der gegenüber den solaren Modellen anderen Geometrie findet man auch in den F5V-Modellen wieder ausge dehnte langsame Aufströmungen und schnelle konzentrierte Abströmungen. Ebenso zeigt sich ein ausgeprägtes Overshooting aus den konvektiv instabilen Gebieten in die Photosphäre hinein.

### 6.3.2 Mittlere Schichtungen

Abb. 55 zeigt die auf der optischen Skala gemittelte Temperaturstruktur der beiden F5V-Modelle. Man vergleiche Abb. 55 mit Abb. 47 (Seite 89), die die Verhältnisse für die Sonne zeigt. Wie dort erweist sich die graue Schichtung in der Photosphäre *kühler* als die nichtgraue. Am oberen Rand der Atmosphäre liegt die Temperatur der grauen Schichtung um 700 K unterhalb der der nichtgrauen. Wie im Fall der Sonne findet man im grauen Modell um  $\lg \tau_R = -0.5$  eine etwas geringere Temperatur als im nichtgrauen Modell.

Abb. 56 stellt die korrespondierenden Heizraten für die beiden F5V-Modelle dar. Ihr entspricht Abb. 48 für die Sonne. Beide F5V-Modelle besitzen in Gebieten  $\lg \tau_R < -1.3$  einen positiven Mittelwert. Der Anstieg des Mittelwertes bei  $\lg \tau_R = -3.4$  im nichtgrauen Modell ist ein Artefakt der Mittelung auf der optischen Skala. Bei Mittelung auf der geometrischen Skala zeigt sich kein solches Verhalten. Nur 13 % des gesamten Datenensembles gehen in den Mittelwert in der optischen Tiefe  $\lg \tau_R = -4.0$  ein. Solch geringe optische Tiefen wird man immer dann vorfinden, wenn die Temperaturen in der Nähe des oberen Randes niedrig sind. Bei niedrigen Temperaturen ist eine höhere radiative Heizung zu erwarten. Die Auswahl niedriger Temperaturen führt also zu einer Verfälschung des Mittelwertes der Heizrate nach oben und der Temperatur nach unten. Abb. 56 zeigt, daß auch in der F5V-Atmosphäre die höhere Photosphäre im Mittel stets durch Strahlung geheizt wird. Der graue Strahlungstransport reagiert auf vergleichbare Temperaturfluktuationen wieder weniger empfindlich als der nichtgraue. Die grauen Heizraten sind in geringer optischer Tiefe — anders als in der Sonne — von gleicher Größe wie die nichtgrauen.

Für das *graue* HD-Modell beträgt die Temperaturdifferenz zur grauen Strahlungsgleichgewichtsatmosphäre bei  $\lg \tau_R = -4.0$  1400 K. Dieser Wert entspricht dem, den man für die Sonne findet. Gegenüber der Sonne stellt sich in der F5V-Atmosphäre in gleicher optischer Tiefe eine deutlich höhere Heizrate ein. Zum einen liegt dies an einer größeren Opazität (pro Masseneinheit), die in dieser Tiefe vorliegt. Zum anderen an der höheren Temperaturempfindlichkeit der Kirchhoff-Planck-Funktion. Beide Effekte sind letztlich auf die höheren Temperaturen, die in der F5V-Atmosphäre herrschen, zurückzuführen.

Das *nichtgraue* F5V-Modell zeigt im Mittel ähnliche Heizraten wie das entsprechende Sonnenmodell. Vergleicht man die Randtemperatur der Schichtung mit der dazugehörigen Strahlungsgleichgewichtsschichtung (siehe Abb. 59), so findet sich eine Temperaturdifferenz in der höheren Photosphäre von maximal 180 K. Für die Sonne beträgt der zugehörige Wert 600 K. Wir sehen, daß in der F5V-Photosphäre

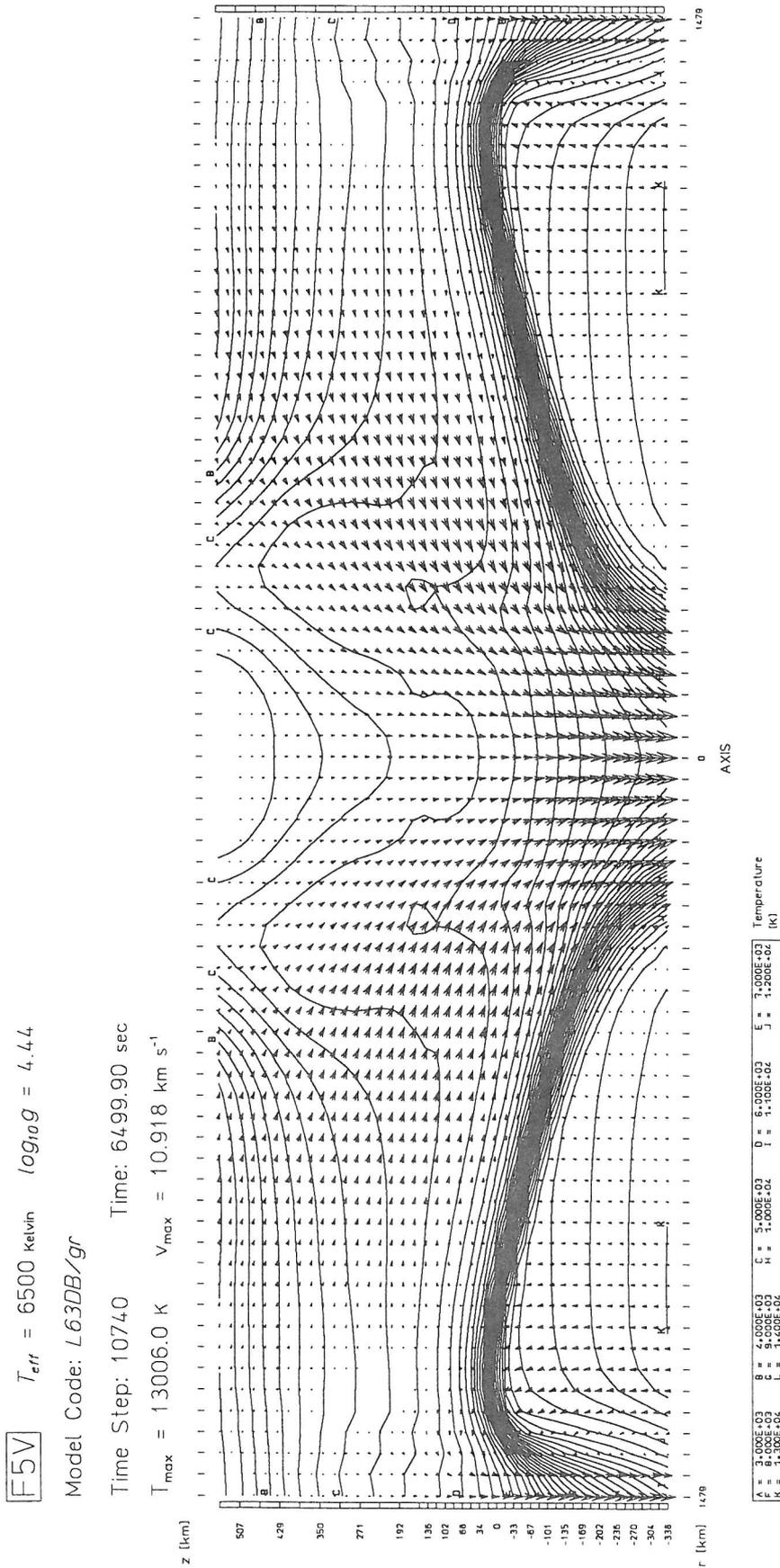


Abb. 53: Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des grauen hydrodynamischen F5V-Modells.

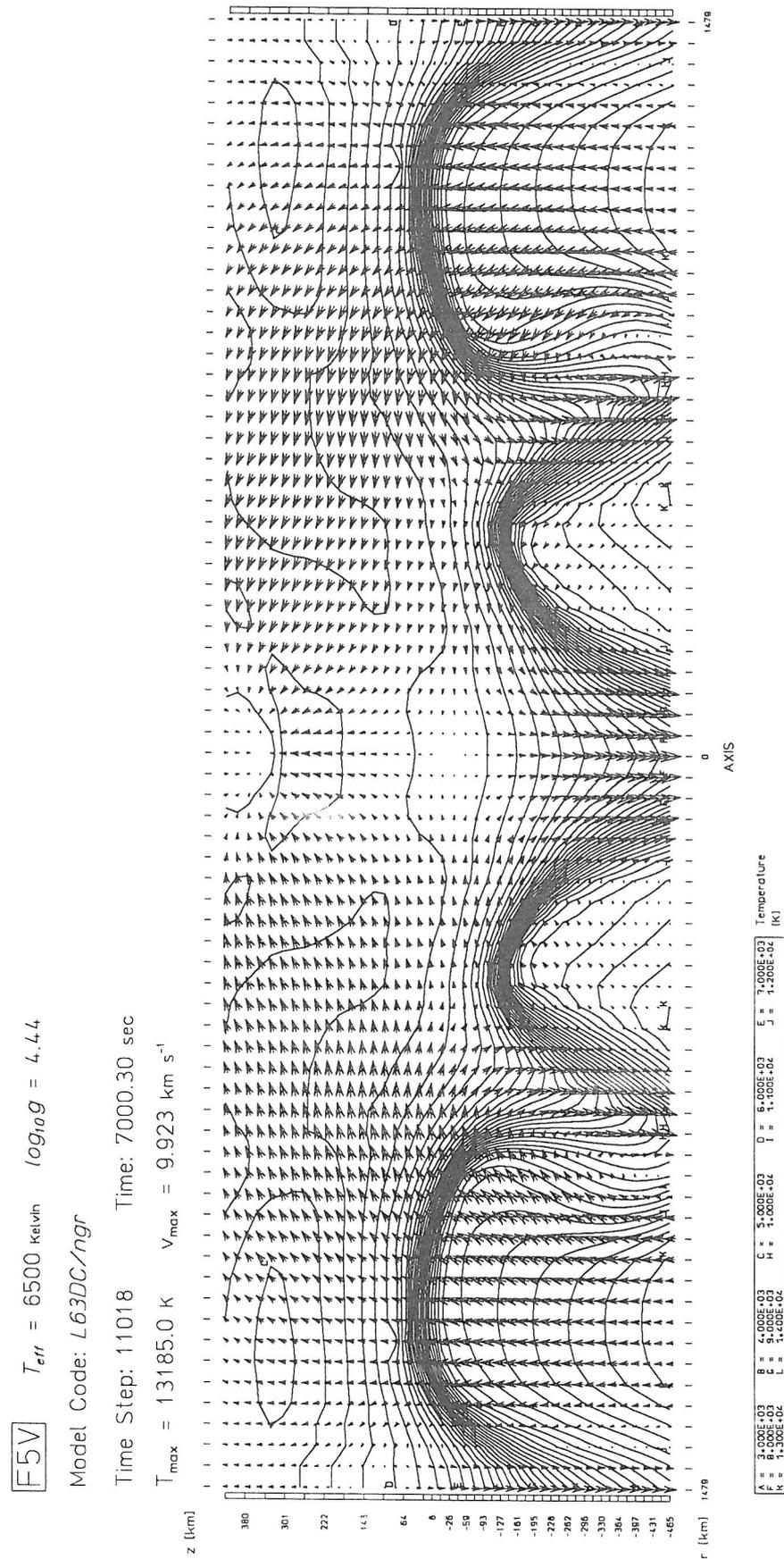


Abb. 54: Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des nichtgrauen hydrodynamischen F5V-Modells.

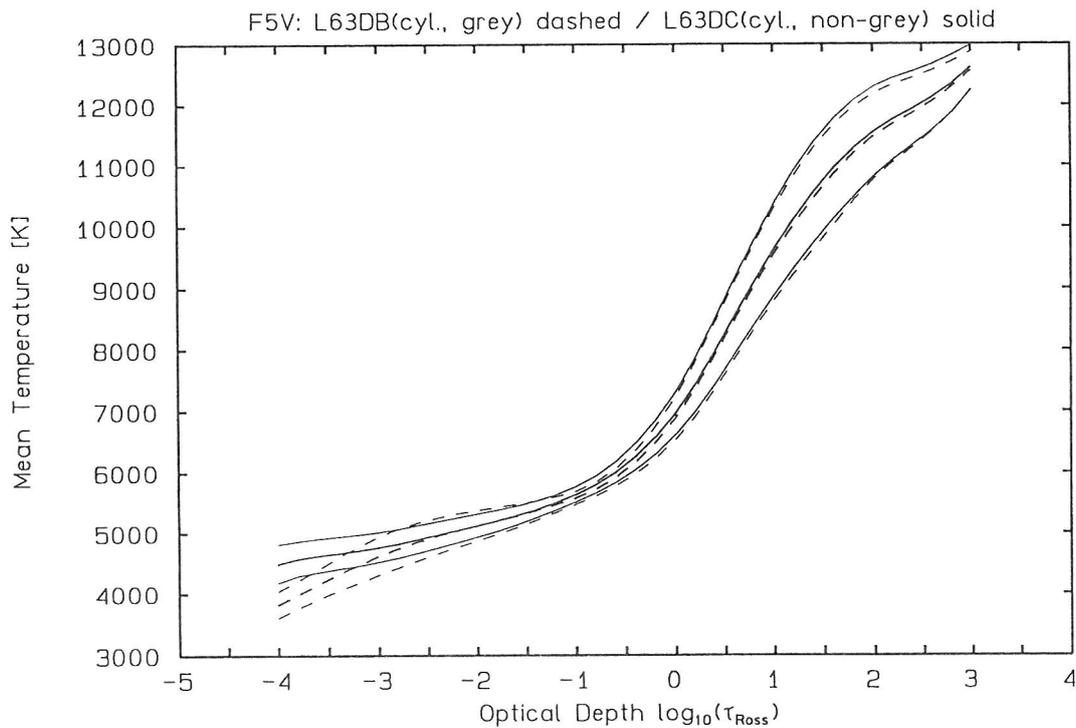


Abb. 55: Räumlich und zeitlich gemittelte Temperaturschichtungen des grauen (gestrichelte Kurven) und nichtgrauen (durchgezogene Kurven) F5V-Modells. Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Temperatur in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[T] \pm \sigma[T]$  und geben ein Maß für die auftretenden Temperaturschwankungen.

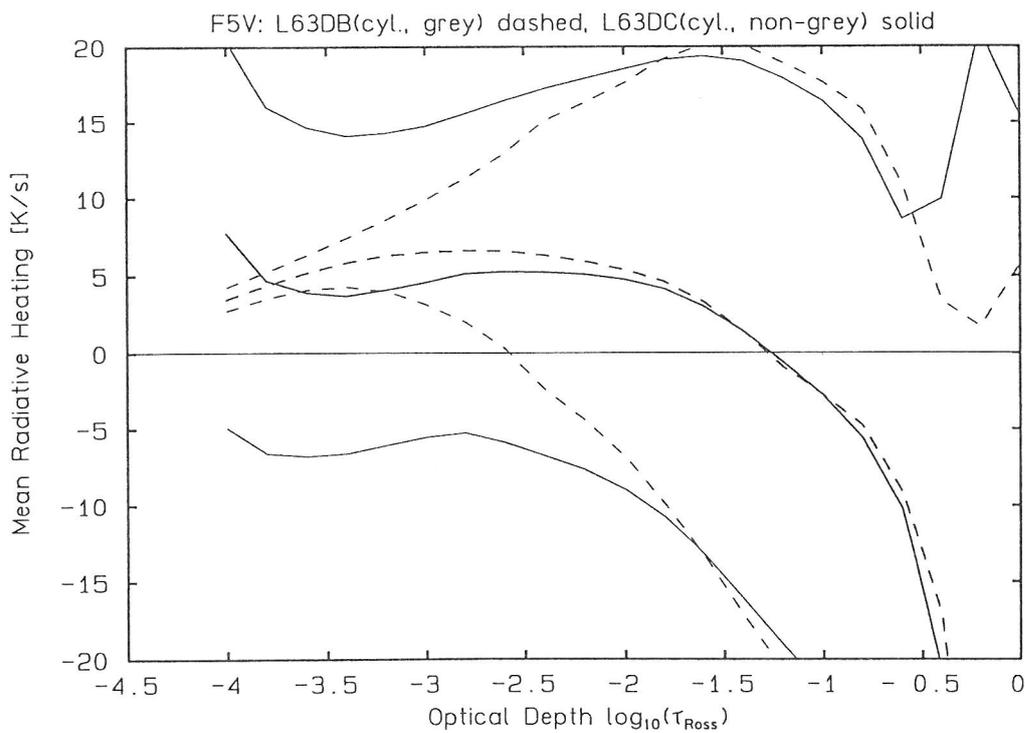


Abb. 56: Räumlich und zeitlich gemittelte radiative Heizraten des grauen (gestrichelte Kurven) und nichtgrauen (durchgezogene Kurven) F5V-Modells gemäß Gleichung (5.1). Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Rate in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[R] \pm \sigma[R]$  und geben ein Maß für die auftretenden Fluktuationen der Heizrate.

eine deutlich geringere Differenz zur Strahlungsgleichgewichtstemperatur ausreicht, um vergleichbare Heizraten zu bewirken. In diesem Sinne ist eine effektivere Kopplung der HD-Schichtung an die Strahlungsgleichgewichtsschichtung gegeben. Die Kopplung reicht aber nicht aus, eine Strahlungsgleichgewichtsschichtung einzustellen und photosphärische Temperaturfluktuationen zu unterdrücken.

Neueste Ergebnisse (STEFFEN, 1991a) *kartesischer* Simulationen zeigen, daß die zylindrische Geometrie der hier betrachteten Modelle einen erheblichen Einfluß auf die photosphärische Randtemperatur hat. Man findet im neuen nichtgrauen Modell eine Absenkung der Randtemperatur gegenüber der Strahlungsgleichgewichtsschichtung von  $\approx 600$  K, was dem solaren Wert entspricht. Wie wir später sehen werden, erhält man in den kartesischen Modellen ein vehementeres photosphärisches Geschwindigkeitsfeld. D.h. engere Kopplung der Temperatur an die Strahlungsgleichgewichtsschichtung und intensivere konvektive Kühlung kompensieren sich im F-Stern, so daß wieder eine ähnliche Absenkung der Randtemperatur wie in der Sonne resultiert.

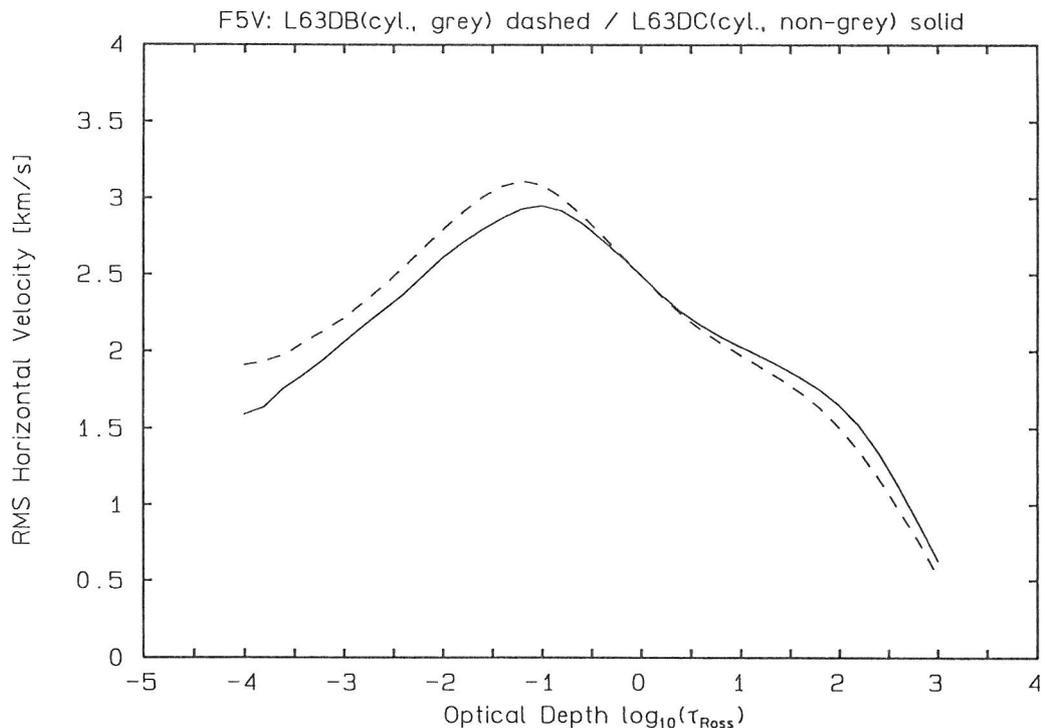


Abb. 57: Räumliches und zeitliches RMS-Mittel der horizontalen Geschwindigkeitskomponente für das graue (gestrichelte Kurve) und das nichtgraue (durchgezogene Kurve) F5V-Modell.

Die Abbildungen 57 und 58 zeigen die RMS-Mittel der horizontalen bzw. vertikalen Geschwindigkeitskomponente in den F5V-Modellen. Wie im Fall der Sonne sollten hier wieder weniger die Unterschiede zwischen den Geschwindigkeitsverläufen ins Auge gefaßt werden als vielmehr das generelle Verhalten. In der Photosphäre dominieren horizontale Stömungen das Geschwindigkeitsfeld. Man findet einen Maximalwert von 3 km/s bei  $\lg \tau_R = -1$  und einen stetigen Abfall zum äußeren Rand hin. In der Sonne zeigt sich eher ein Plateau bei 3 km/s (siehe Abb. 49). Dieses unterschiedliche Verhalten ist wahrscheinlich durch die zylindrische Modellgeometrie bedingt. Die neuen Simulationen für den Spektraltyp F5V in kartesischer Geometrie weisen für das Verhalten der Horizontalgeschwindigkeit ein zur Sonne analoges Verhalten auf. Dort stellt sich in der Photosphäre ein Plateauwert von 4.5 km/s ein. Die Vertikalgeschwindigkeit am oberen Rand der hier präsentierten Modelle beträgt

1.4 km/s. Die Simulation in kartesischer Geometrie liefert für die Vertikalgeschwindigkeit ebenfalls höhere Werte von knapp 2 km/s.

In den subphotosphärischen Gebieten findet man wieder vornehmlich vertikale Strömungsvorgänge. Der Maximalwert der auftretenden mittleren Vertikalgeschwindigkeit liegt bei  $\lg \tau_R = 2$  und beträgt 3.5 km/s. Die kartesische Simulation liefert gleiche Ergebnisse. Gegenüber der Sonne ist dieser Wert um 0.6 km/s größer. Diese Zunahme kann als Ausdruck des in den F-Sternen noch effektiveren konvektiven Energietransportes verstanden werden.

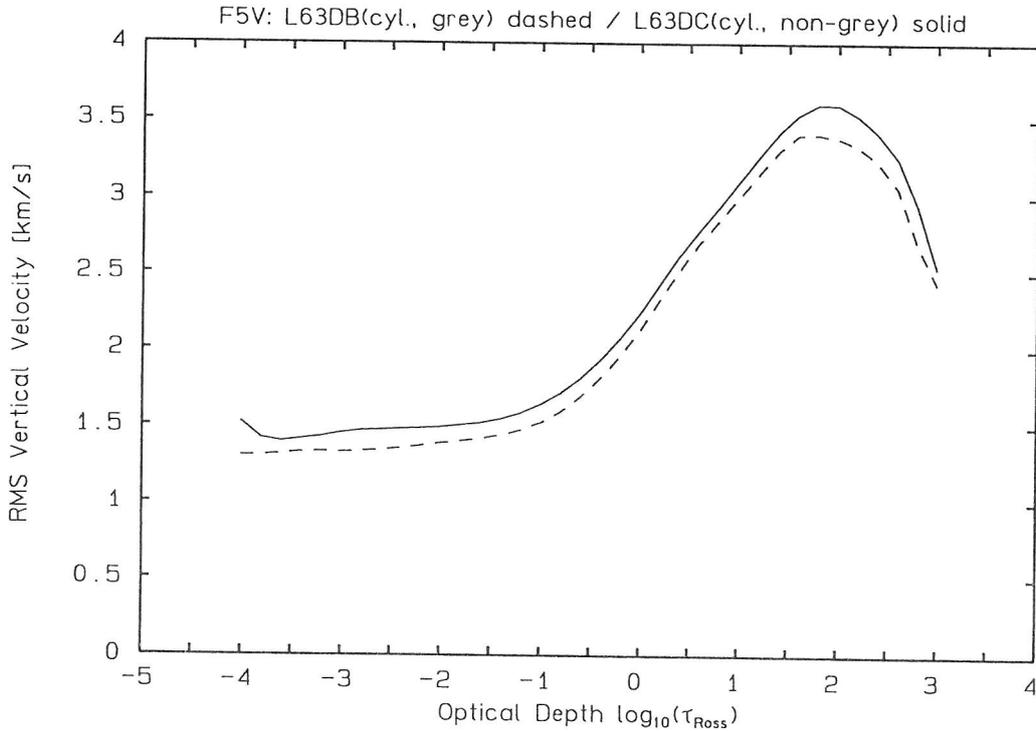


Abb. 58: Räumliches und zeitliches RMS-Mittel der vertikalen Geschwindigkeitskomponente für das graue (gestrichelte Kurve) und das nichtgraue (durchgezogene Kurve) F5V-Modell.

### 6.3.3 Vergleich zwischen HD- und ATLAS6-Modellen

Abb. 59 stellt die Temperaturschichtung des nichtgrauen hydrodynamischen F5V-Modells und des zugehörigen ATLAS6-Modells gegenüber. Bei der Berechnung des ATLAS6-Modells ist ein Mischungsweg  $l/H_p = 2$  zugrundegelegt. Der Strahlungstransport wird in beiden Fällen in der F5V-Mehrbandbeschreibung behandelt. Man vergleiche Abb. 59 mit der korrespondierenden Abb. 51 für die Sonne.

In großen optischen Tiefen ist die hydrodynamische Temperaturschichtung deutlich heißer als die ATLAS6-Schichtung mit  $l/H_p = 2$ . In einer optischen Tiefe  $\lg \tau_R = 1.5$  entspricht die Temperatur der HD-Schichtung in etwa der eines Mischungswegmodells mit  $l/H_p = 0.5$ . Ab  $\lg \tau_R = 0.4$  wird die HD-Schichtung zunächst kühler, ab  $\lg \tau_R = -0.3$  geringfügig heißer und ab  $\lg \tau_R = -1.3$  schließlich kühler als die ATLAS6-Schichtung. Die Verhältnisse sind ganz ähnlich wie in der Sonnenatmosphäre gelagert. Im photosphärischen Bereich allerdings ist in der F5V-Atmosphäre die Abweichung von der Strahlungsgleichgewichtstemperatur nicht so groß. Die maximale Abweichung beträgt 180 K. In der gesamten Photosphäre liegt die ATLAS6-Schichtung innerhalb des Variationsbereichs der HD-Schichtung. Ähnlich wie für die Sonne ist im Hinblick auf die F5V-Atmosphäre festzuhalten:

- In der höheren Photosphäre ist die HD-Schichtung kühler als die ATLAS6-Schichtung.
- Der Verlauf der Temperatur der HD-Schichtung kann nicht durch eine ATLAS6-Schichtung unter Verwendung eines bestimmten tiefenunabhängigen Mischungswegparameters  $\alpha = l/H_p$  wiedergegeben werden.
- Der mittlere HD-Temperaturgradient ist bei  $\lg \tau_R = 0$  etwas flacher als der der ATLAS6-Schichtung.
- In der tieferen Photosphäre  $-1.5 < \lg \tau_R < 0.0$  stimmen die Schichtungen bis auf 170 K überein.

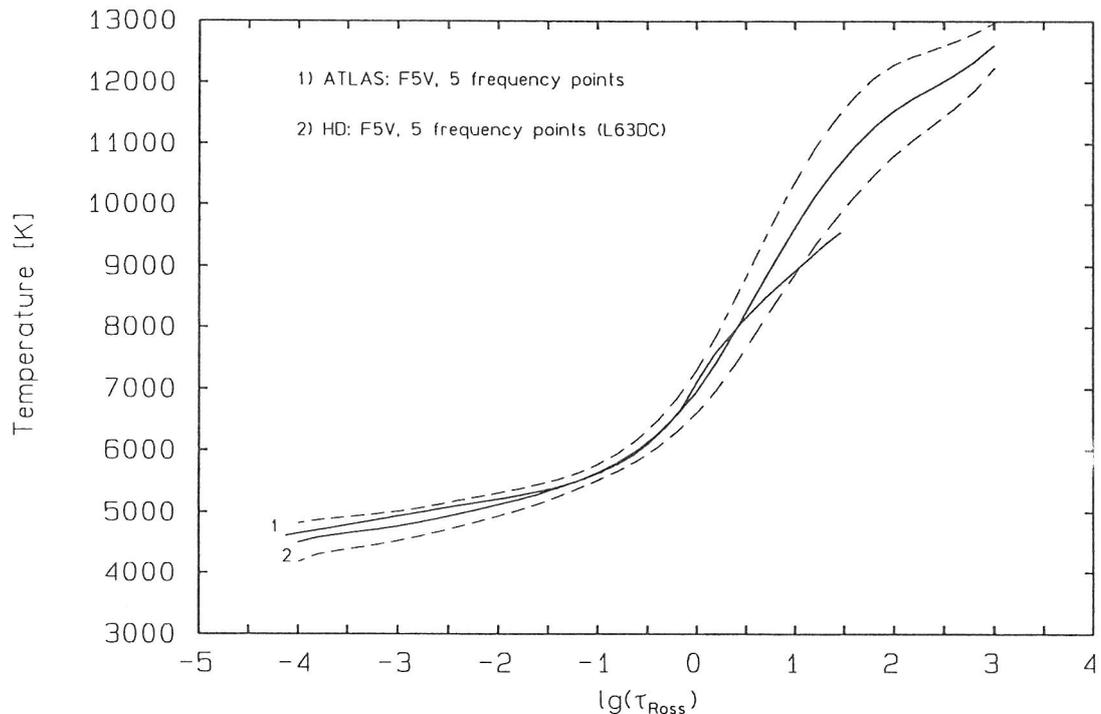


Abb. 59: HD- und ATLAS6-Temperaturschichtung für die F5V-Atmosphäre. Beide Schichtungen sind unter Zugrundelegung der F5V-Mehrbandbeschreibung (5 Frequenzpunkte) berechnet. Als Mischungsweg  $l$  bei der Bestimmung der ATLAS6-Schichtung (Kurve 1) wird ein Wert von  $l/H_p = 2$  verwendet. Zusätzlich ist für die HD-Schichtung (Kurve 2) die Schwankungsbreite der Temperatur (gestrichelte Kurven) eingezeichnet.

Abb. 60 zeigt die in den Modellen auftretenden Geschwindigkeiten. Wieder gibt die Mischungswegtheorie unter Zugrundelegung eines Mischungswegparameters  $\alpha = 2$  eine brauchbare Abschätzung der auftretenden konvektiven Maximalgeschwindigkeiten. Die Lage des Maximums wird wiederum nicht getroffen.

NORDLUND und DRAVINS (1990) konstruieren hydrodynamische 3-D Modelle für die Atmosphären vier prototypischer Objekte, die im Hertzsprung-Russell-Diagramm in der Nachbarschaft der Sonne liegen. Es sind Procyon (F5IV-V,  $T_{\text{eff}} = 6600$  K,  $\lg g = 4.14$ ),  $\alpha$  Cen A (G2V,  $T_{\text{eff}} = 5800$  K,  $\lg g = 4.14$ ),  $\beta$  Hyi (G2IV,  $T_{\text{eff}} = 5800$  K,  $\lg g = 3.84$ ) und  $\alpha$  Cen B (K1V,  $T_{\text{eff}} = 5200$  K,  $\lg g = 4.44$ ). Auch wenn die Objekte in Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung nicht genau mit den in dieser Arbeit behandelten übereinstimmen, seien einige Vergleiche gezogen. Generell finden Nordlund und Dravins ebenfalls, daß die Temperaturstruktur in den subphotosphärischen Gebieten *nicht* mit Hilfe eines tiefenunabhängigen

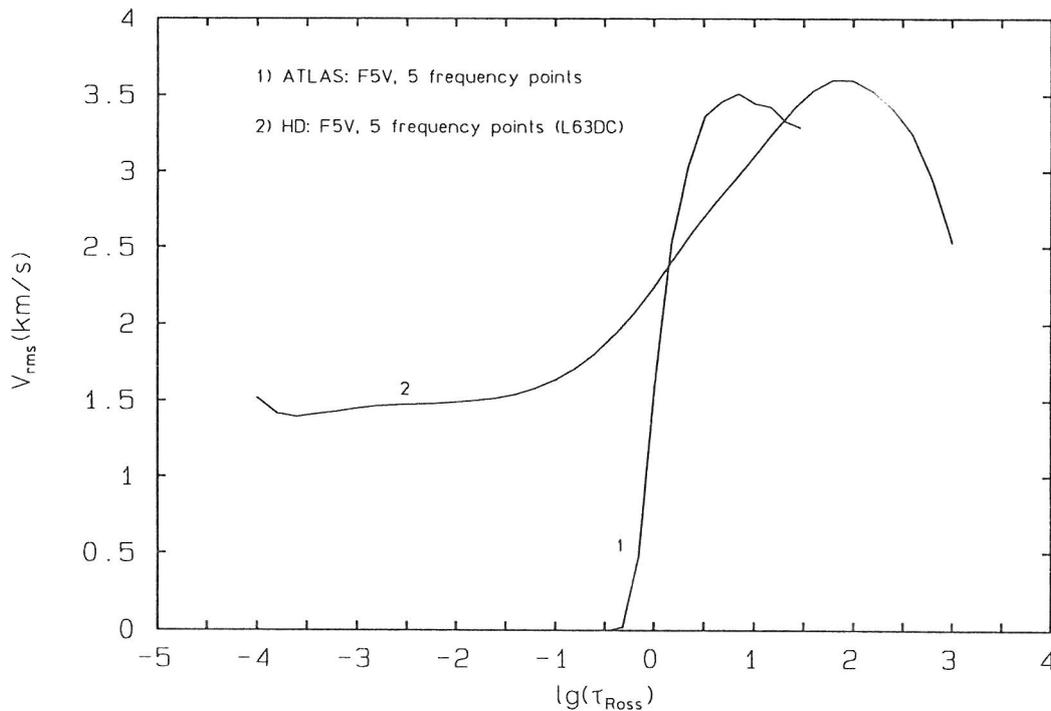


Abb. 60: Konvektive Geschwindigkeiten nach Mischungswegtheorie (Kurve 1,  $l/H_p = 2$ ) aus einem ATLAS6-Modell und RMS-Mittel der Vertikalgeschwindigkeit des nichtgrauen HD-Modells (Kurve 2). In beiden Fällen ist für den Strahlungstransport die F5V-Mehrbandbeschreibung (5 Frequenzpunkte) zugrundegelegt.

Mischungswegparametern modelliert werden kann. Dies bezieht sich allgemein auf die superadiabatischen Bereiche am oberen Rand der auftretenden Konvektionszonen. In großen Tiefen wird die Schichtung nahezu adiabatisch und kann im Rahmen der Mischungswegtheorie wiedergegeben werden.

Die Temperaturschichtung im  $\alpha$  Cen A Modell zeigt in der Photosphäre ( $\lg \tau_{5200} < -0.2$ ) kaum Abweichungen von einer Strahlungsgleichgewichtsatmosphäre. In der Sonne hingegen findet NORDLUND (1985) Abweichungen von ca. 350 K. Es ist bemerkenswert, daß eine Reduzierung der Schwerebeschleunigung um einen Faktor 2 eine solch starke Verringerung der dynamischen Effekte auf die photosphärische Temperaturstruktur zur Folge hat.

In den bisher in dieser Arbeit betrachteten HD-Schichtungen, fällt der Temperaturgradient um  $\lg \tau_R = 0$  stets flacher als in den zugehörigen ATLAS6-Schichtungen aus. Für das relativ kühle  $\alpha$  Cen B Modell finden Nordlund und Dravins einen steileren Gradienten, allerdings beim Vergleich auf der Druckskala. Es stellt sich die Frage, ob sich diese Umkehr im Verhaltens des Temperaturgradienten in Schichten, in denen das Strahlungskontinuum gebildet wird, auch auf der optischen Skala zeigen würde.

Die RMS-Vertikalgeschwindigkeiten, die Nordlund und Dravins in den oben erwähnten vier Modellen finden, besitzen in der Photosphäre einen Verlauf, der systematisch von den hier präsentierten Ergebnissen abweicht. Die Vertikalgeschwindigkeiten fallen zum oberen Rand der Atmosphäre stetig ab. So beträgt die Geschwindigkeit bei  $\lg \tau_{5200} = -4$  im  $\alpha$  Cen A Modell gerade noch 0.35 km/s. Vermutlich spielt bei diesem Verhalten die von Nordlund und Dravins verwendete *anelastische Approximation* eine Rolle, die die Ausbildung von Schallwellen in den Simulationen unterdrückt.

## 6.4 Spektraltyp A0V (Wega)

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der hydrodynamischen Simulationen der Atmosphäre von Wega dargestellt. Wega besitzt in ihrer Hülle keine ausgeprägte Konvektionszone. Die Resultate unterscheiden sich daher auch in qualitativer Hinsicht von denen der vorangegangenen Modelle.

### 6.4.1 Vorstellung der Modelle

Tabelle 7 faßt die wesentlichen Parameter der beiden Wegamodelle zusammen. Wega besitzt gegenüber den vorangegangenen Modellen eine deutlich erhöhte Effektivtemperatur und eine Schwerebeschleunigung, die um einen Faktor 3.5 niedriger ist. In beiden *instationären* Modelle ist *kartesische* Geometrie vorgegeben. Der Strahlungstransport wird mit der A0V-Opazitätstabelle beschrieben. Der graue Strahlungstransport verwendet rein Rosselandsche Opazitäten. Die Mischungswegtheorie sagt für die Wegaatmosphäre nur eine dünne Konvektionszone voraus, die sich über den Bereich  $-1 < \lg \tau_R < 1$  erstreckt. Die Konvektion trägt zum gesamten Energietransport nur einen sehr kleinen Bruchteil bei (nach Mischungswegtheorie ca.  $6 \cdot 10^{-6}$ , wobei  $l/H_p = 2$ ). Als Startmodell für die Simulationen diente ein älteres zylindrisches Modell aus Arbeiten von GIGAS (1990). Die Tiefenerstreckung des Simulationsvolumens ist so gewählt, daß sich innerhalb des Volumens der Übergang des Wasserstoffs vom überwiegend neutralen zum fast vollkommen ionisierten Element vollzieht. Das graue Modell umfaßt eine optische Tiefe von  $-2.6 < \lg \tau_R < 1.0$ , das nichtgraue  $-3.4 < \lg \tau_R < 1.0$ .

Modellcode	A65DA9Z	A65DE7Y
$T_{\text{eff}}$ (soll)	9500 K	9500 K
$\lg g$	3.90	3.90
Geometrie	kartesisch	kartesisch
Seitliche Randbedingung	periodisch	periodisch
Unterer Rand	geschlossen	geschlossen
Oberer Rand	geschlossen	geschlossen
Horizontale Ausdehnung	5100 km	5100 km
Vertikale Ausdehnung	5625 km	5625 km
Strahlungstransport	grau	nichtgrau
Frequenzpunkte	1	5
Opazitätstabelle	a0v-opta	a0v-opta
Zeitbasis	3251 s	3440 s
$T_{\text{eff}}$ (ist)	9500 K	9500 K
Einzelbildkontrast	0.56 %	0.49 %

Tabelle 7: Modellparameter der beiden instationären hydrodynamischen A0V-Modelle. Der erste Datenblock enthält den Modellnamen und den spezifizierten Spektraltyp, der zweite geometrische Parameter und Randbedingungen, der dritte Eigenschaften des verwendeten Strahlungstransportes, der vierte die zur Mittelung verwendete Zeitbasis und der fünfte Angaben zur Effektivtemperatur, die das Modell über den angegebenen Zeitraum besitzt, sowie zum mittleren (RMS) Intensitätskontrast im frequenzintegrierten Licht.

Die Energie in der Wegaatmosphäre wird in allen Tiefen fast ausschließlich durch Strahlung transportiert. Hydrodynamische Vorgänge beeinflussen die Temperatur- und Druckstruktur wenig. Es liegt in guter Näherung Strahlungsgleichgewicht vor. Diese Verhältnisse kommen auch in den Zeitskalen zum Ausdruck, auf denen die dynamischen und radiativen Prozesse ablaufen. Als radiative Zeitskala soll hier die

Zeit verstanden werden, in der die Strahlung eine Temperaturstörung ausgleicht, die die Ausdehnung einer Gitterzelle besitzt. In den betrachteten Modellen beträgt das Minimum der radiativen Zeitskala 15 ms. Als dynamische Zeitskala soll die Courant-Zeit verstanden werden, d.h. die Schalllaufzeit über eine Gitterzelle. Die dynamische Zeitskala beträgt minimal etwa 3 s. Wir sehen, daß die radiative Zeitskala um einen Faktor 200 kürzer ist als die dynamische. Potentiellen Abweichungen der Temperatur vom Strahlungsgleichgewichtswert, die durch dynamische Vorgänge hervorgerufen werden, wirkt die Strahlung effektiv entgegen. Die Verhältnisse liegen in Wega damit deutlich anders als in der Sonne und in dem F-Stern. Dort laufen die dynamischen auf vergleichbaren Zeitskalen wie die radiativen Prozesse ab.

Eine Konsequenz dieser Verhältnisse ist eine starke Reduktion des Zeitschritts gegenüber dem Courant-Zeitschritt in den Wegasimulationen. So beträgt in den präsentierten Modellen der Zeitschritt typischerweise 1/10 des Courant-Zeitschritts. In der Sonne dagegen ist der Zeitschritt durch den Courant-Zeitschritt selbst bestimmt. Erst in neuester Zeit ist es gelungen, die numerische Behandlung der zeitlichen Entwicklung des Strahlungsfeldes so zu verbessern, daß auch in den Simulationen für Wega der Courant-Zeitschritt erreicht wird. In jedem Fall ist das Verhältnis von Rechenzeit zu simulierter Echtzeit für Wega deutlich ungünstiger (Faktor 10) als für die Sonne.

Abb. 61 zeigt ein Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des nichtgrauen Modells. Es ist davon abgesehen worden, ein entsprechendes Bild für das graue Modell gegenüberzustellen, da die Eigenschaften der beiden Vergleichsmodelle sehr ähnlich sind. Auffällig in Abb. 61 ist zunächst die fast planparallele Temperaturstruktur. Sie resultiert nach dem oben Gesagten aus der hohen Effizienz, mit der die Strahlung Temperaturfluktuationen ausgleicht. Das Geschwindigkeitsfeld besitzt gegenüber den späteren Spektraltypen einen gänzlich anderen Charakter. Konvektion im Sinne von heißen Aufwärts- und kühlen Abwärtsströmungen ist nicht erkennbar. Wir finden eine Zunahme der Geschwindigkeiten vom Boden zum oberen Rand des Modells. Sie sind Ausdruck von Wellen, die sich im Simulationsvolumen ausbreiten. Eine Welle mit gegebener Energiedichte muß in Gebieten niedrigerer Massendichte eine höhere Amplitude aufweisen. So sind qualitativ die höheren Geschwindigkeitsamplituden zum oberen Rand hin verständlich.

Für die Erklärung der in A-Sternen spektroskopisch nachgewiesenen Mikroturbulenz ist das Verständnis dieses Wellenphänomens wahrscheinlich von entscheidender Bedeutung. Betrachtet man in den bislang durchgeführten HD-Simulationen den nichtoszillatorischen Anteil des Geschwindigkeitsfeldes, so ist der Beitrag dieser „echten“ Konvektion zur Gesamtamplitude der Geschwindigkeit gering und auf das dünne Gebiet konvektiver Instabilität beschränkt (FREYTAG, 1991a). Die Konvektion könnte jedoch Wellen anregen, die beim Hineinlaufen in Gebiete mit geringerer Dichte eine hohe Amplitude gewinnen. Die annähernd planparallelen Schwingungen, die man in den HD-Rechnungen beobachtet, sind Eigenschwingungen des Simulationsvolumens (siehe GIGAS, 1990 sowie FREYTAG, 1991a). Die Anregung und Dämpfung der einzelnen Moden sind noch Gegenstand aktueller Untersuchungen. Daß aber überhaupt solche Wellenphänomene in den theoretischen Modellen auftreten, bestärkt uns in der Annahme, daß sie auch in realen Sternatmosphären eine wichtige Rolle spielen.

Eine bereits erwähnte Schwierigkeit sind die extrem langen Zeitspannen, auf denen sich ein im statistischen Sinne stationäres Geschwindigkeitsfeld einstellt. Die Anregung oder Dämpfung der verschiedenen Schwingungsmoden erfolgt auf Zeitskalen, die — zumindest für Wega — im Rahmen eines hydrodynamischen Simulationslaufs

[ Plot created: Wednesday 11-DEC-1991 20:30:37 ]

[ Data file: SSS:(SUPAS079.TMP)A65DEY.F15,1 created 91-09-21 20:24. 3 ]

A0V     $T_{eff} = 9500$  Kelvin     $\log_{10} g = 3.90$

Model Code: A65DE/ngr

Time Step: 53433      Time: 15820.000 sec

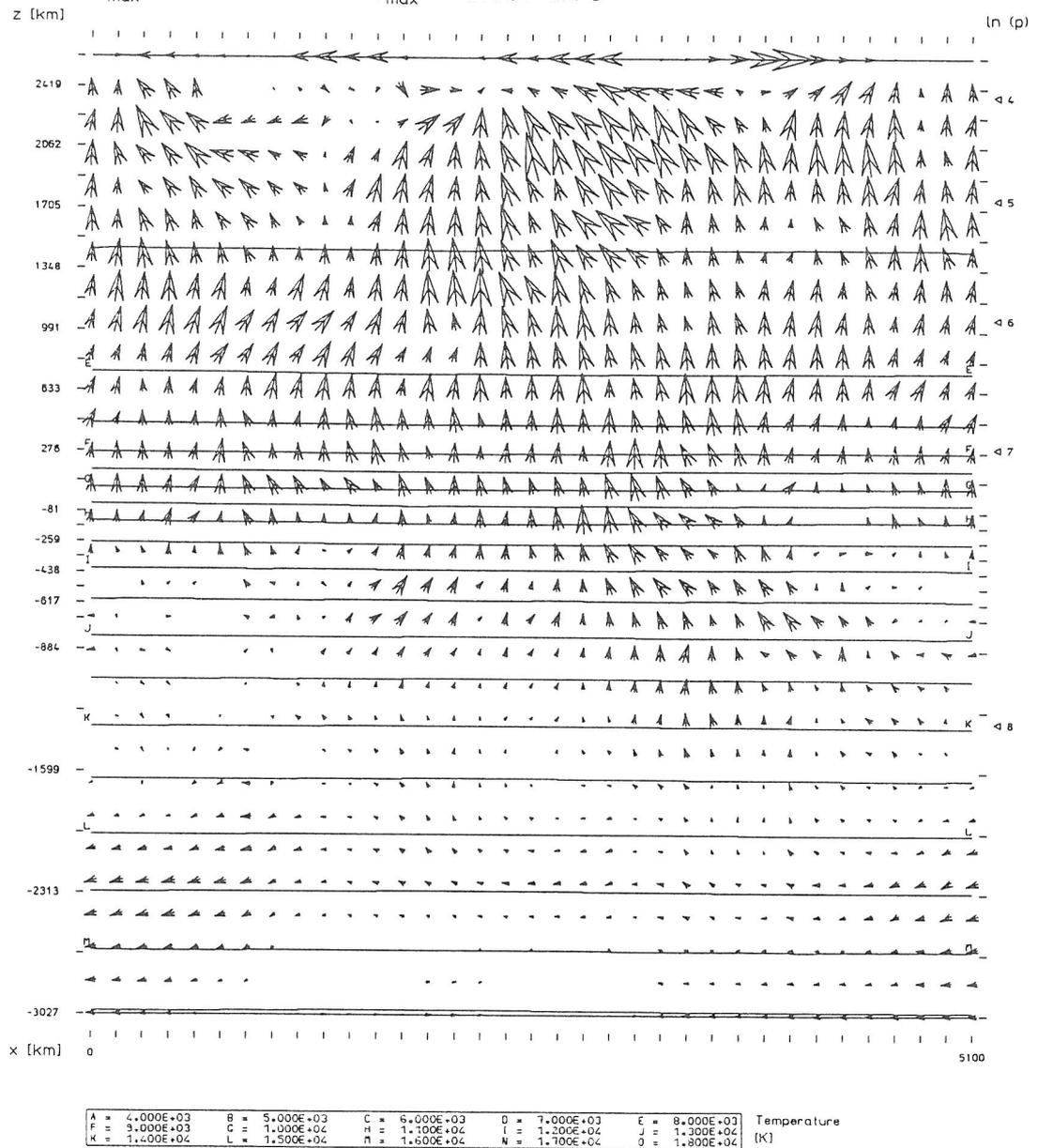
 $T_{max} = 16540.0$  K       $v_{max} = 0.801$  km  $\cdot$  s $^{-1}$ 

Abb. 61: Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des nichtgrauen Hydrodynamik-Wegamodells.

(noch) nicht erfaßt werden können. Sie liegen für Wega wahrscheinlich im Bereich um  $10^4$  s. Die aufeinander folgenden Simulationsläufe für das graue und nichtgraue Modell umfassen einen Zeitraum von knapp 16000 s. Der Rechenzeitbedarf hierfür betrug bereits ca. 300000 s (Cray X-MP CPU-Zeit). Man findet trotzdem noch einen systematischen zeitlichen Trend (Abnahme) in der kinetischen Gesamtenergie, die im Simulationsvolumen enthalten ist. Das Geschwindigkeitsfeld nach Abb. 61 kann demnach weiterhin langfristigen Änderungen unterliegen. So wird etwa die auftretende Maximalgeschwindigkeit (hier 0.801 km/s) noch entscheidend von dem im Anfangsmodell vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld mitbestimmt. Dies erlaubt im Hinblick auf das Geschwindigkeitsfeld nur einen eingeschränkten Vergleich mit Ergebnissen der Mischungswegtheorie, wie er in einem nachfolgenden Abschnitt vorgenommen wird.

Der Grund für die langen Zeitskalen, auf denen sich ein Strömungsmuster mit stabilen statistischen Eigenschaften einstellt, liegt wiederum im effektiven Strahlungsaustausch. Versuchsweise ist eine HD-Simulation vorgenommen worden, bei der Strahlungsaustausch nicht berücksichtigt wurde. Gestartet wurde die Simulation dabei mit einer planparallelen Strahlungsgleichgewichtsschichtung, der nur eine geringfügige Geschwindigkeitsstörung aufgeprägt wurde. In einer Strahlungsgleichgewichtskonfiguration findet netto keine energetische Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld und Materie statt. Das programmtechnische Abschalten des Strahlungsaustausches in der Testsimulation ist damit verträglich. Verfolgt man nun die Zeitentwicklung der Strömung, erhält man ein rasches Anwachsen der Geschwindigkeiten auf Zeitskalen von nur  $\approx 200$  s. Damit Auftriebskräfte wirksam werden können, sind Temperaturunterschiede zwischen dem aufsteigenden Material und der Umgebung notwendig, die in Wega durch die Strahlung wirksam unterdrückt werden und so zu einer Verlängerung der Anwachszeiten führen.

Abb. 62 zeigt einen Ausschnitt aus der zeitlichen Entwicklung des grauen und nichtgrauen Modells. Dargestellt sind der Verlauf von Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur an neun ausgewählten Orten. Die neun Orte liegen bei einer festen horizontalen Position in unterschiedlichen Höhen. Das Endmodell des grauen Simulationslaufs diente als Startmodell der nichtgrauen Simulation. Die Umschaltung vom grauen auf den nichtgrauen Strahlungstransport erfolgte nach 4046 s. Der Zeitpunkt ist in der Darstellung des Temperaturverlaufs gut zu erkennen. In den höheren Schichten findet eine Abkühlung (Positionen 6, 7, 8 und 9), in den tieferen eine Aufheizung (Positionen 1, 2, 3, 4 und 5) statt. Die Umstellung geschieht sehr rasch auf einer Zeitskala von wenigen Sekunden. Beherrscht wird das Bild über den gesamten Zeitraum von langperiodischen Oszillationen. Ihre Periode beträgt 1110 s für das graue bzw. 1150 s für das nichtgraue Modell. In der Vertikalgeschwindigkeit sind darüberhinaus noch kurzperiodische Fluktuationen erkennbar. Aufgrund des Startmodells ist in dem Simulationslauf aus den möglichen Eigenschwingungen vornehmlich der Grundmode angeregt. Zu ihm gehört die beobachtete langperiodische Oszillation. Die Grundschwingung erfährt während der Simulationszeit eine merkliche Dämpfung, was nicht direkt aus Abb. 62 hervorgeht.

#### 6.4.2 Mittlere Schichtungen

Für die Berechnung der mittleren Schichtungen ist nicht der ganze simulierte Zeitraum herangezogen worden, sondern es ist für beide Modelle jeweils über drei Oszillationsperioden gemittelt worden. Abb. 63 zeigt die auf der optischen Skala gemittelte Temperaturstruktur des grauen und nichtgrauen Modells. Wie immer sind auch die

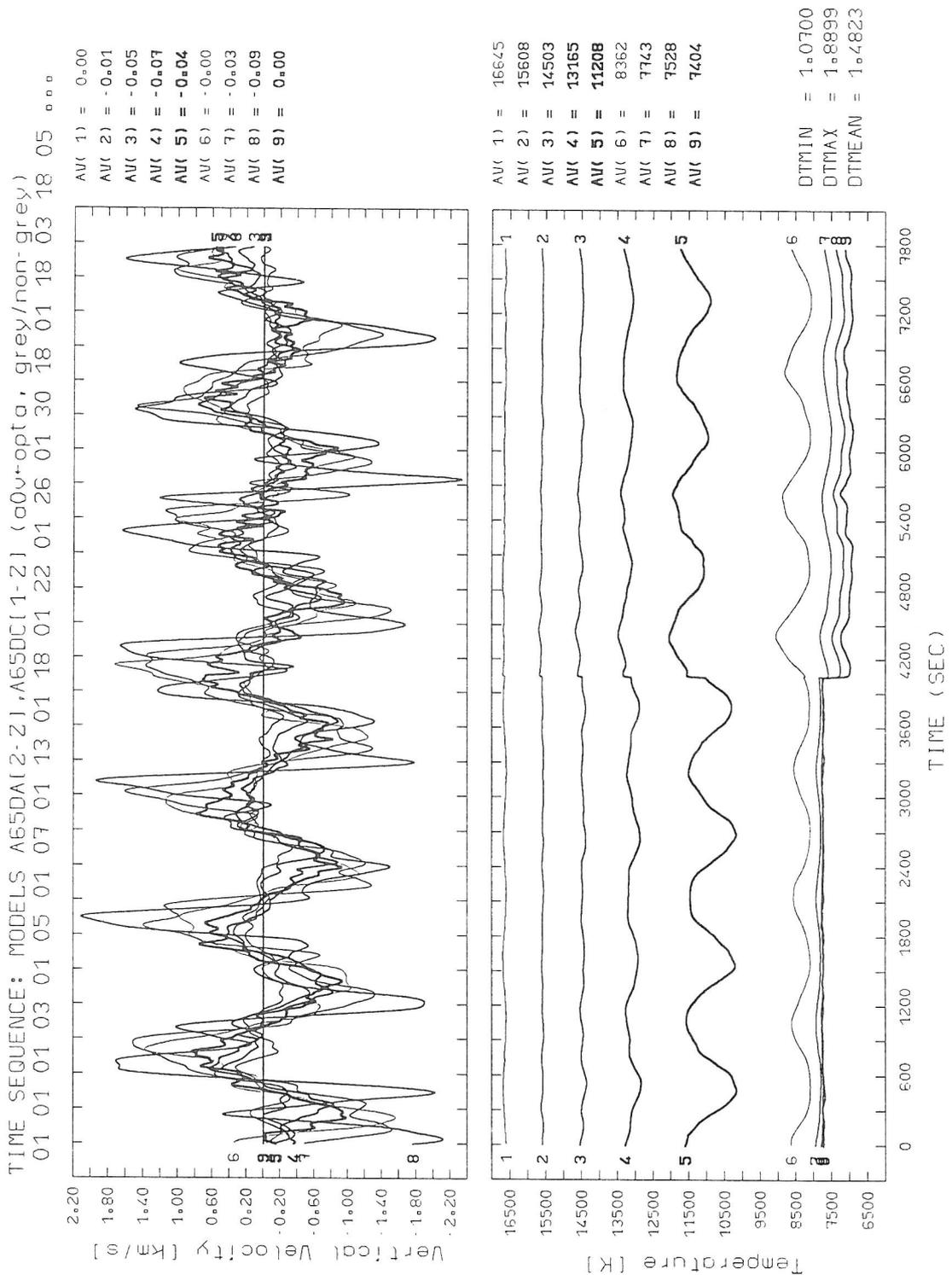


Abb. 62: Ausschnitt aus der Zeitentwicklung der hydrodynamischen Wegamodelle an neun ausgewählten Orten (Numeriert von 1 bis 9). Dargestellt sind die Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur. Die neun Orte liegen an einer festen horizontalen Position in unterschiedlichen Tiefen. Punkt 1 liegt am unteren, Punkt 9 am oberen Rand. (In Abb. 61 befinden sich Marken an der x- und z-Achse. Numeriert man sie von links nach rechts bzw. von unten nach oben, liegen die neun Orte an den Positionen (1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (1,13), (1,18), (1,22), (1,26) und (1,30).) Zusätzlich vermerkt sind die zeitlichen Mittelwerte der Größen am jeweiligen Ort.

Temperaturfluktuationen eingezeichnet. Sie fallen auf der optischen Skala jedoch so gering aus, daß sie in der Abb. 63 nicht in Erscheinung treten. Nach Abb. 62 sind an einem festgehaltenen geometrischen Ort nicht unerhebliche Temperaturschwankungen zu erkennen. Dies zeigt auch Abb. 64, die die Temperaturstruktur beider Modelle gemittelt auf der *geometrischen* Skala wiedergibt. Hier sind die Temperaturvariationen klar zu erkennen. Daß die Temperaturvariationen auf der optischen Skala weitaus geringer ausfallen, ist wieder Ausdruck der Tatsache, daß der effektive Strahlungsaustausch, für den die optische Skala maßgeblich ist, auftretende Temperaturstörungen rasch egalisiert.

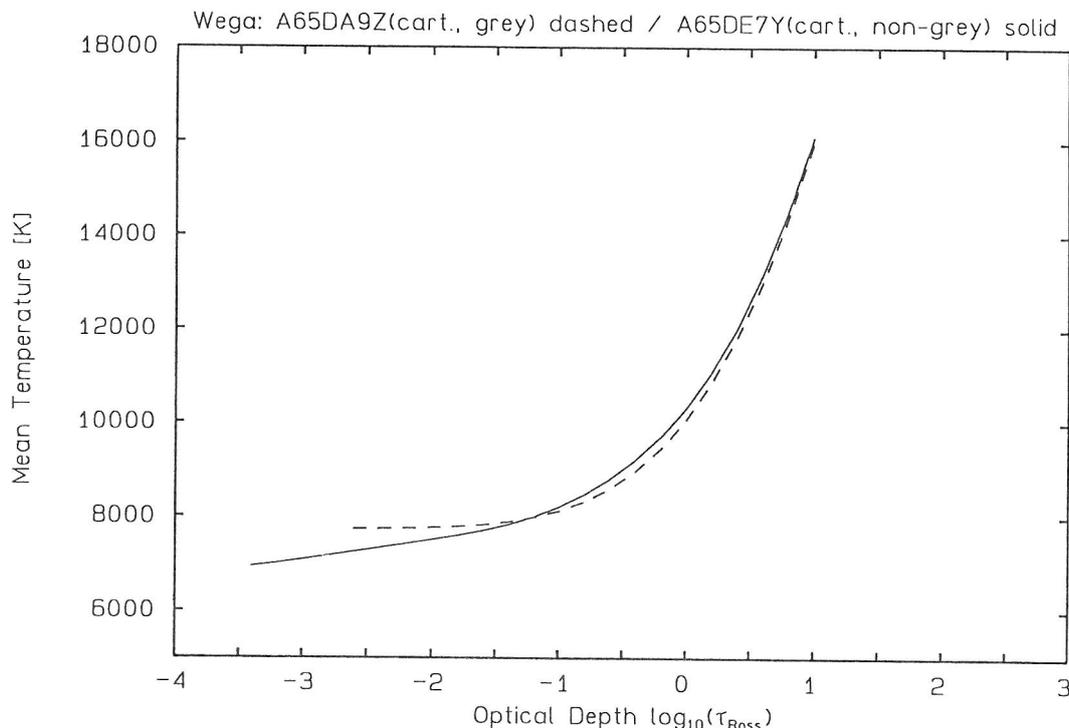


Abb. 63: Räumlich und zeitlich auf der optischen Skala gemittelte Temperaturschichtungen des grauen (gestrichelte Kurve) und nichtgrauen (durchgezogene Kurve) A0V-Modells. Die Kurven stellen jeweils den Erwartungswert der Temperatur in der betreffenden Tiefe dar. In der Abbildung sind in der üblichen Weise auch die Temperaturschwankungen angegeben. Sie fallen auf der optischen Skala jedoch so gering aus, daß sie nicht erkennbar sind.

Die Temperaturschichtung in den hydrodynamischen Wegamodellen entspricht in guter Näherung einer Strahlungsgleichgewichtsschichtung. Abb. 65 zeigt die mittleren Heizraten. In optischen Tiefen  $\lg \tau_R < -1.5$  herrscht im Mittel Strahlungsgleichgewicht. Im Gegensatz zu den Verhältnissen in den späteren Spektraltypen findet man keine Abnahme in der Schwankungsbreite der Heizrate nach oben. Im grauen wie nichtgrauen Fall bleibt also die Temperatursensitivität des radiativen Energieaustausches bis in kleine optische Tiefen erhalten. Im Bereich  $-1.5 < \lg \tau_R < 0.5$  findet man leichte Abweichungen vom Strahlungsgleichgewicht. Sie sind Ausdruck der dünnen Zone in Wega, in der ein Anteil vom gesamten Energiefluß durch Konvektion transportiert wird. Ein geringer Bruchteil (hier ca.  $10^{-4}$ ) des aus dem Inneren kommenden Strahlungsstroms wird absorbiert (Bereich mit positiver Heizrate), die Energie konvektiv weitertransportiert und bald wieder reemittiert (Bereich mit negativer Heizrate).

Die Abbildungen 66 und 67 zeigen die RMS-Mittel der horizontalen bzw. vertikalen Geschwindigkeitskomponente. Die Geschwindigkeiten fallen insgesamt klei-

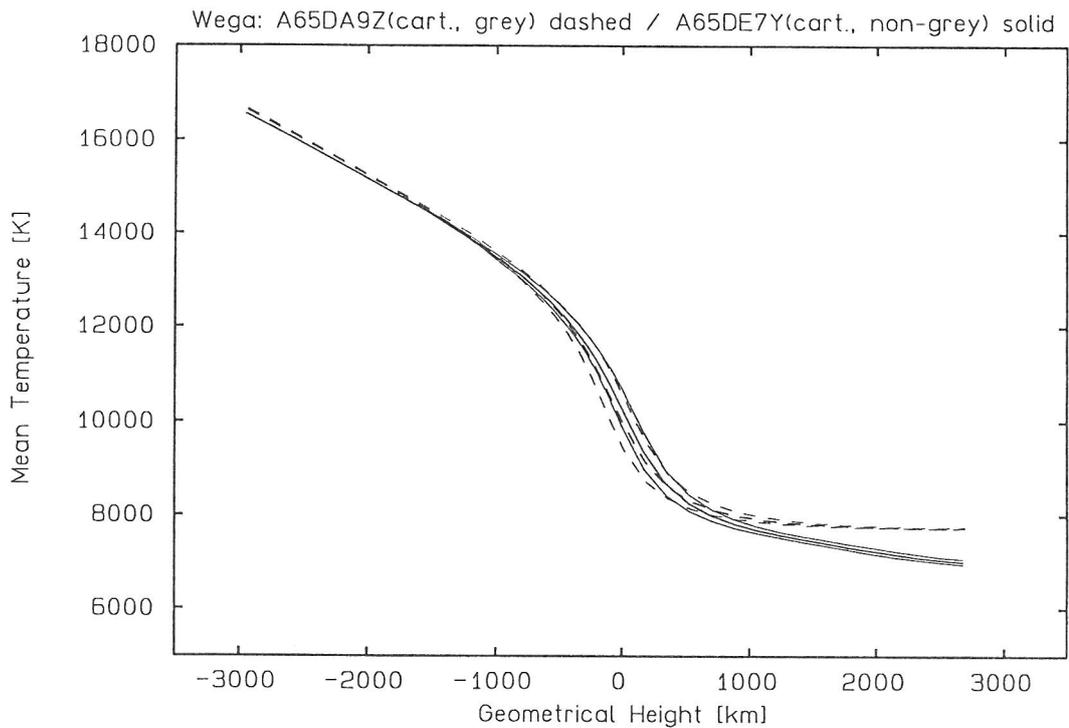


Abb. 64: Räumlich und zeitlich auf der *geometrischen* Skala gemittelte Temperaturschichtungen des grauen (gestrichelte Kurven) und nichtgrauen (durchgezogene Kurven) A0V-Modells. Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Temperatur in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[T] \pm \sigma[T]$  und geben ein Maß für die auftretenden Temperaturfluktuationen.

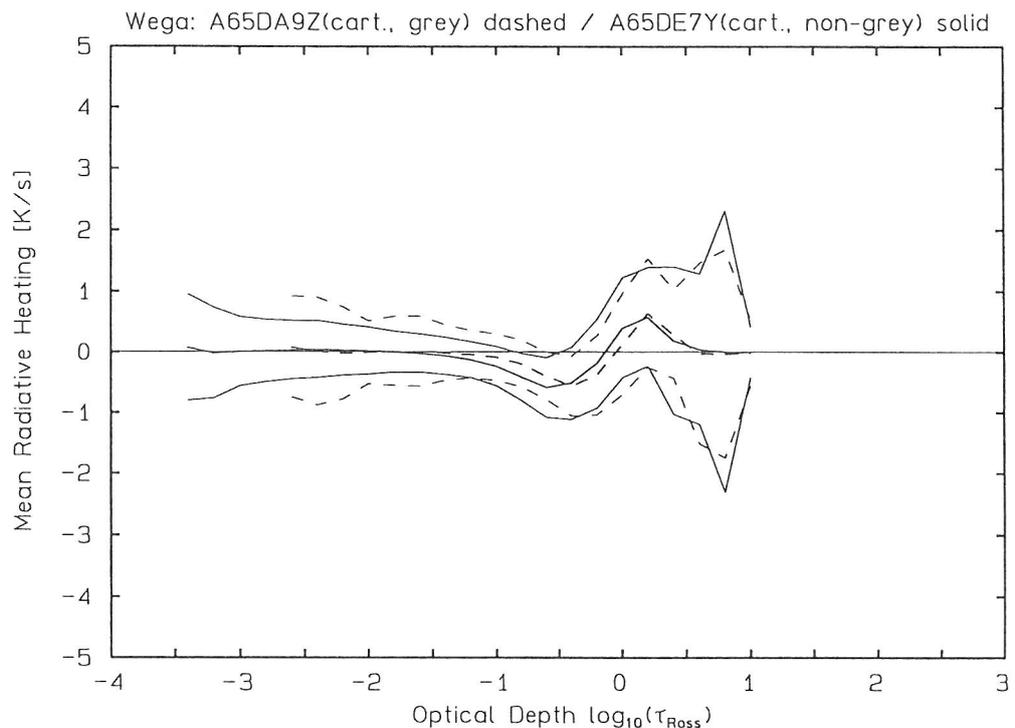


Abb. 65: Räumlich und zeitlich gemittelte radiative Heizraten des grauen (gestrichelte Kurven) und nichtgrauen (durchgezogene Kurven) A0V-Modells gemäß Gleichung (5.1). Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Rate in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[R] \pm \sigma[R]$  und geben ein Maß für die auftretenden Fluktuationen der Heizrate.

ner als für die späteren Spektraltypen aus. Die Vertikalgeschwindigkeit des nicht-grauen Modells nach Abb. 67 ist deutlich geringer als die des grauen. Die Mittelung für das nichtgraue Modell ist etwa 10000s nach dem Umschalten vom grauen auf den nichtgrauen Strahlungstransport vorgenommen worden. In diesem Zeitraum hat die Dämpfung des Grundmodes zu einer systematischen Abnahme der Vertikalgeschwindigkeit gegenüber dem grauen Vorgängermodell geführt. Die Differenz in den Geschwindigkeiten ist also nicht durch die unterschiedliche Behandlung des Strahlungstransportes verursacht, sondern durch noch anhaltende Einstellprozesse der mittleren Modelleigenschaften bedingt. Der geschlossene obere Rand des Simulationsvolumens führt zu dem Abfall der Vertikalgeschwindigkeiten bei sehr kleinen optischen Tiefen. Sieht man von diesen Bereichen ab, wird das Geschwindigkeitsfeld von vertikalen Strömungen dominiert, und man findet mit zunehmender Höhe einen stetigen Anstieg im Geschwindigkeitsbetrag.

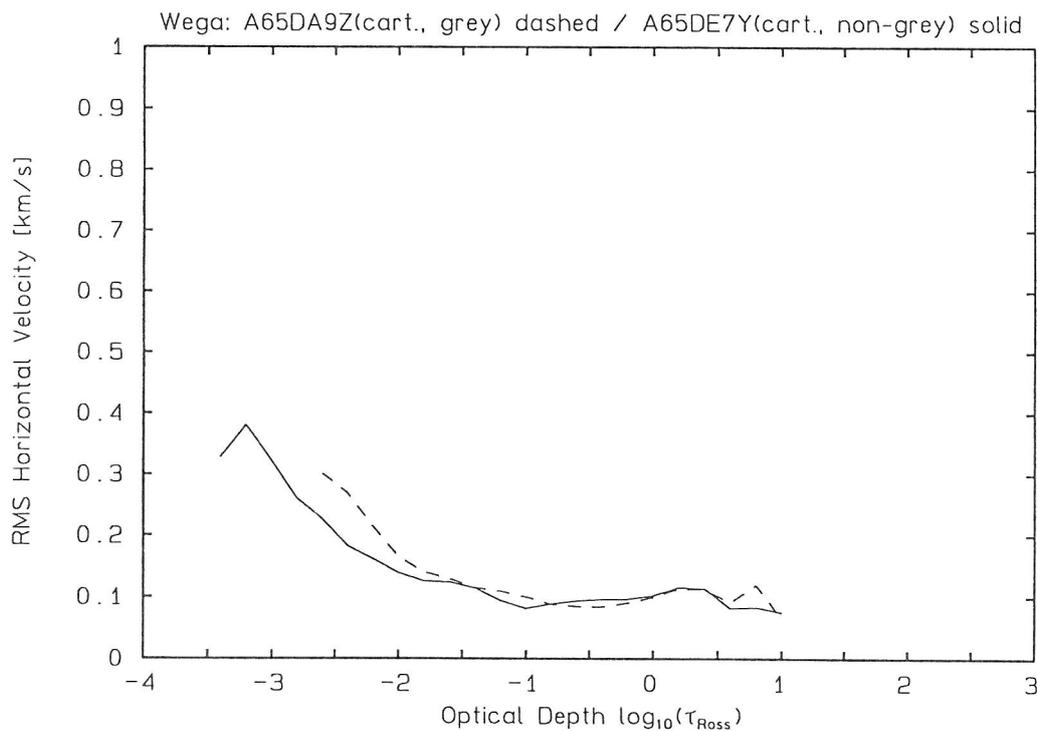


Abb. 66: Räumliches und zeitliches RMS-Mittel der horizontalen Geschwindigkeitskomponente für das graue (gestrichelte Kurve) und das nichtgraue (durchgezogene Kurve) A0V-Modell.

#### 6.4.3 Vergleich zwischen HD- und ATLAS6-Modellen

Abb. 68 stellt die Temperaturschichtung des nichtgrauen hydrodynamischen Wegamodells und des zugehörigen ATLAS6-Modells auf der optischen Skala gegenüber. In der Abbildung sind tatsächlich zwei Kurven eingezeichnet, die aber bei dem Abbildungsmaßstab praktisch ununterscheidbar sind. Ebenso eingezeichnet aber nicht erkennbar ist die Schwankungsbreite in der Temperatur des HD-Modells, da sie sehr gering ist. Im Hinblick auf die Temperaturstruktur gleicht also das HD-Modell einer planparallelen Strahlungsgleichgewichtsschichtung, solange man diese Betrachtung auf der optischen Skala durchführt.

Bemerkenswert ist die Übereinstimmung der Temperaturschichtungen in Abb. 68 auch aus programmtechnischer Sicht. Man muß sich vor Augen halten, daß im ATLAS6- wie HD-Code zwar dieselben Opazitäten verwendet werden, die numeri-

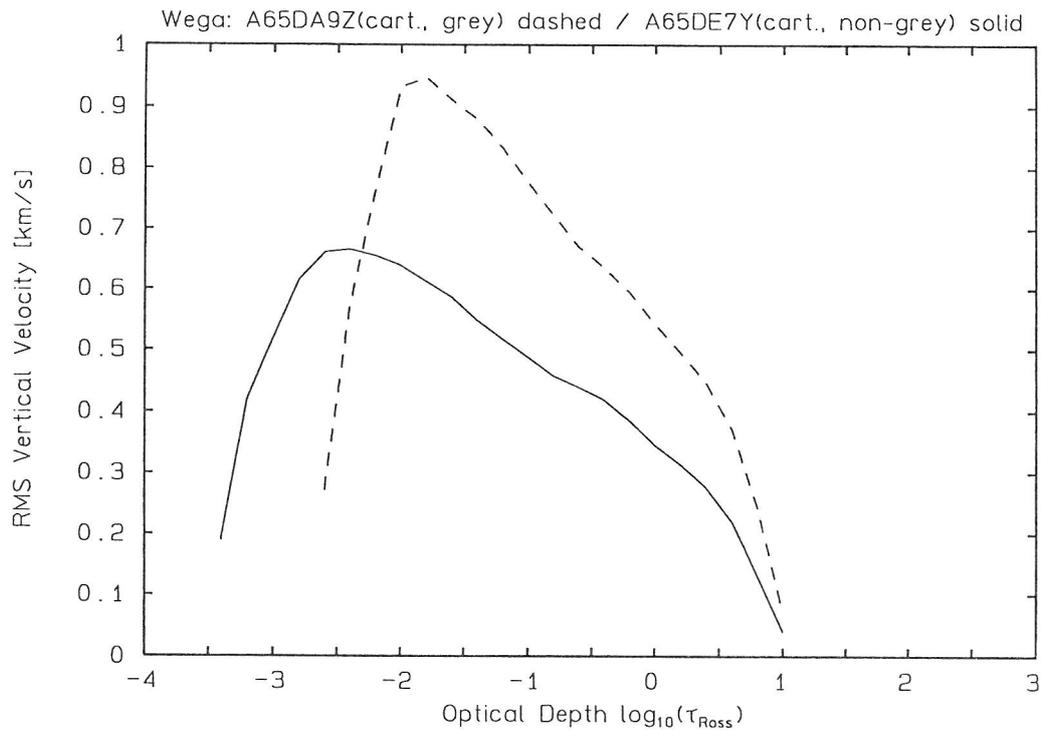


Abb. 67: Räumliches und zeitliches RMS-Mittel der vertikalen Geschwindigkeitskomponente für das graue (gestrichelte Kurve) und das nichtgraue (durchgezogene Kurve) A0V-Modell.

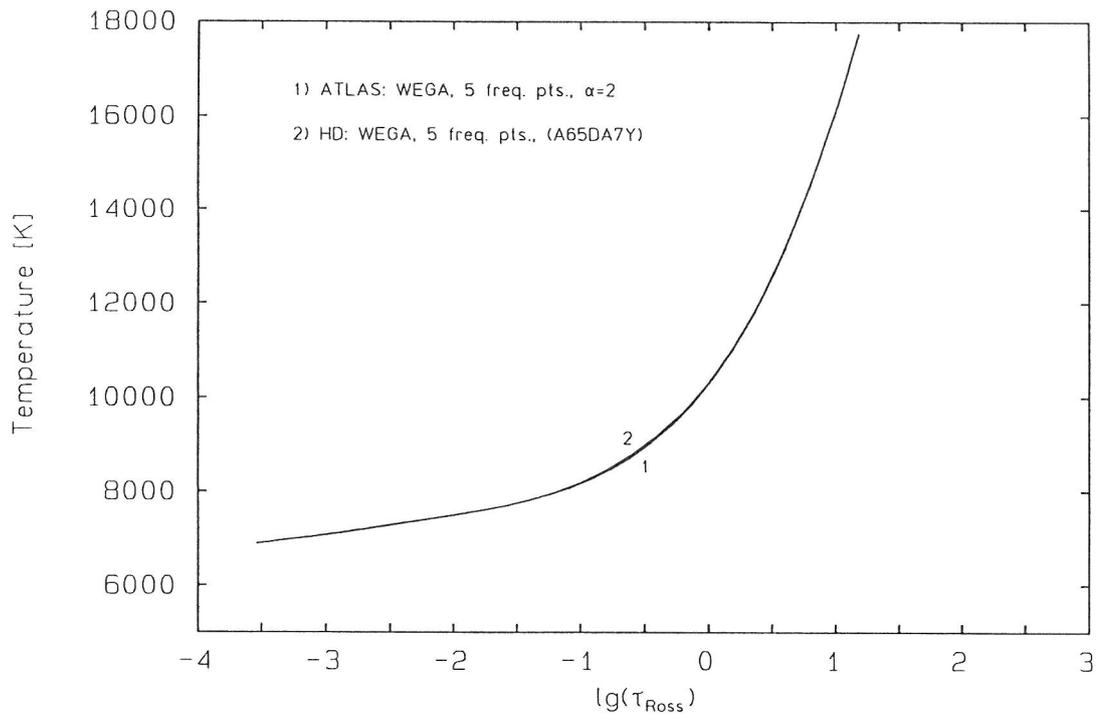


Abb. 68: ATLAS6- (Kurve 1) und HD-Temperaturschichtung (Kurve 2) für die A0V-Atmosphäre. Beide Schichtungen sind unter Zugrundelegung der A0V-Mehrbandbeschreibung (5 Frequenzpunkte) berechnet. Beide Kurven sind beim gegebenen Abbildungsmaßstab fast ununterscheidbar. Auf der optischen Skala zeigen sich im HD-Modell keine erkennbaren Temperaturfluktuationen.

sche Behandlung des Strahlungstransportes aber in gänzlich anderer Weise geschieht. ATLAS6 verwendet eine Matrixdarstellung des  $\Lambda$ -Operators in einer planparallelen Atmosphäre zur Berechnung der mittleren Intensität. Im HD-Code wird der Strahlungstransport winkelabhängig mit Hilfe vieler repräsentativer Lichtstrahlen behandelt, die mittlere Intensität nach Lösung der Transportgleichung für alle Richtungen durch Winkelintegration gewonnen. Die gute Übereinstimmung bei der Wiedergabe einer Strahlungsgleichgewichtsschichtung zeigt rückblickend, daß auch kleine Unterschiede in den bisher betrachteten Temperaturschichtungen *nicht* numerischer Natur sind.

Abb. 69 zeigt die in den Modellen auftretenden konvektiven Geschwindigkeiten. Für das ATLAS6-Modell ist ein Mischungsweg von  $l/H_p = 2$  zugrundegelegt. Während die Temperaturschichtung in Wega praktisch unabhängig vom Mischungsweg ist, sind die konvektiven Geschwindigkeiten nach wie vor empfindlich von ihm abhängig. Bei dem Vergleich der Modelle nach Abb. 69 sollte man etwas Vorsicht walten lassen. Wie gesagt, hat das HD-Modell noch keinen im statistischen Sinn stationären Zustand erreicht, wie es für den Vergleich mit den Ergebnissen der Mischungswegtheorie wünschenswert wäre. Unter diesem Vorbehalt zeigt Abb. 69, daß die Mischungswegtheorie im Fall von Wega höchstens eine Abschätzung der Größenordnung der auftretenden Geschwindigkeiten liefern kann. Die Höhenverläufe der Geschwindigkeit besitzen kaum Gemeinsamkeiten.

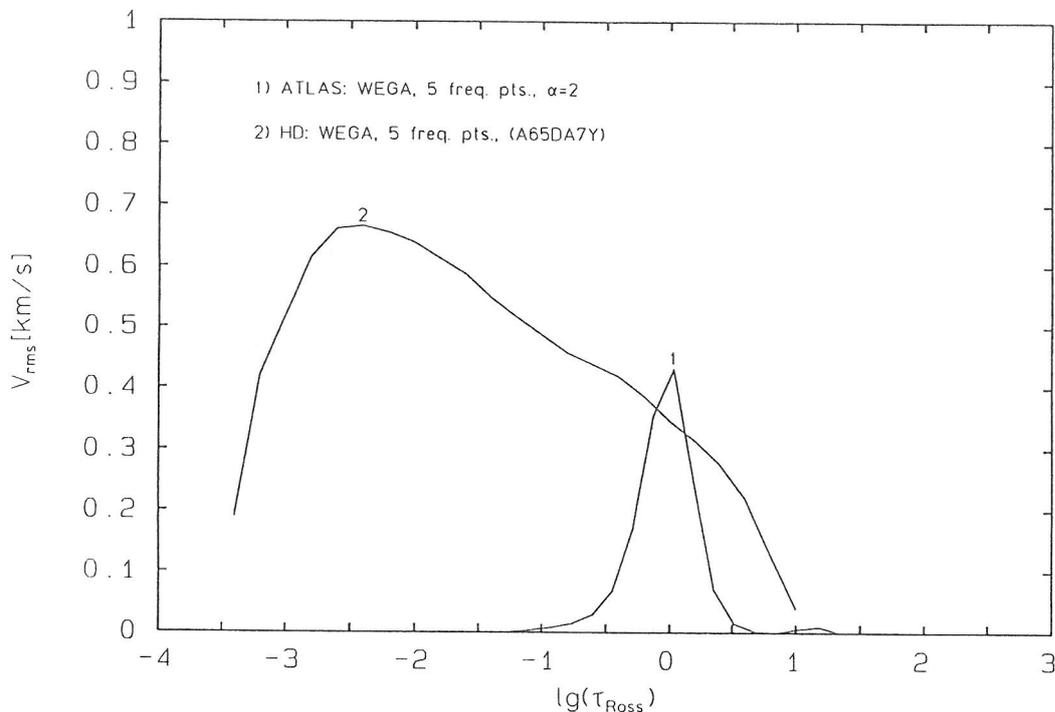


Abb. 69: Konvektive Geschwindigkeiten nach Mischungswegtheorie (Kurve 1,  $l/H_p = 2$ ) aus einem ATLAS6-Modell und RMS-Mittel der Vertikalgeschwindigkeit des nichtgrauen HD-Modells (Kurve 2). In beiden Fällen ist für den Strahlungstransport die A0V-Mehrbandbeschreibung (5 Frequenzpunkte) zugrundegelegt.

## 6.5 Weißer Zwerg, Spektraltyp DA

Die Modellrechnungen für die Atmosphäre des Weißen Zwergs vom Spektraltyp DA ( $T_{eff} = 11300$  K,  $\lg g = 8.0$ ) sind noch nicht soweit gediehen wie die für die Atmosphären der bisher betrachteten Hauptreihensterne. So liegt bis jetzt nur ein

Modell vor, bei dem der Strahlungstransport in grauer Näherung behandelt wird. Von daher wird bei der Darstellung der Ergebnisse von der bisherigen Vorgehensweise abgewichen und nur ein Vergleich mit Mischungswegmodellen vorgenommen. Der Einfluß des nichtgrauen Strahlungstransportes wird Gegenstand späterer Untersuchungen sein. Obwohl die bislang erzielten Resultate noch vorläufigen Charakter haben, sind sie doch so vielversprechend, daß eine Aufnahme in diese Arbeit gerechtfertigt erschien.

### 6.5.1 Vorstellung des Modells

Tabelle 8 faßt die wesentlichen Modellparameter zusammen. Der entscheidende Unterschied zu den bisher behandelten Objekten besteht in der hohen Schwerebeschleunigung, die in der Atmosphäre des Weißen Zwerges herrscht. Die Druckskalenhöhe  $H_p = (RT)/(\mu g)$  ( $R$  Gaskonstante,  $\mu$  Mittleres Molekulargewicht) als charakteristische Länge beträgt typischerweise 100 m gegenüber 150 km in der Sonne. Im gleichen Maße, wie die räumlichen Skalen schrumpfen, wachsen die Auftriebskräfte  $F_A = \alpha m g \Delta T$  ( $\alpha$  thermischer Ausdehnungskoeffizient,  $m$  Masse,  $\Delta T$  Temperaturdifferenz des Massenelementes gegenüber der Umgebung), die ein Massenelement erfährt. Zusammen mit den kleinen räumlichen Skalen führt dies zu sehr kurzen zeitlichen Skalen, auf denen sich die Strömungsvorgänge abspielen.

Modellcode	Z66D02(27-30)
$T_{\text{eff}}$ (soll)	11300 K
$\lg g$	8.0
Geometrie	kartesisch
Seitliche Randbedingung	periodisch
Unterer Rand	geschlossen
Oberer Rand	geschlossen
Horizontale Ausdehnung	1122 m
Vertikale Ausdehnung	1529 m
Strahlungstransport	grau
Frequenzpunkte	1
Opazitätstabelle	zzcetil-opta
Zeitbasis	1.1 s
$T_{\text{eff}}$ (ist)	11800 K
Einzelbildkontrast	13.75 %

**Tabelle 8:** Modellparameter des instationären hydrodynamischen Modells der Atmosphäre eines DA-Weißen Zwerges. Der erste Datenblock enthält den Modellnamen und den spezifizierten Spektraltyp, der zweite geometrische Parameter und Randbedingungen, der dritte Eigenschaften des verwendeten Strahlungstransportes, der vierte die zur Mittelung verwendete Zeitbasis und der fünfte Angaben zur Effektivtemperatur, die das Modell über den angegebenen Zeitraum besitzt, sowie zum mittleren (RMS) Intensitätskontrast im frequenzintegrierten Licht.

Abb. 70 zeigt ein Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes. Das Simulationsvolumen besitzt im Vergleich zu den Hauptreihenmodellen eine sehr kleine geometrische Ausdehnung. Die vertikale Erstreckung gemessen in Druckskalenhöhen (5.8) ist aber durchaus ähnlich. Der Zeitschritt in der Modellrechnung wird durch den Courant-Zeitschritt bestimmt. Er beträgt für die gewählte Gitterauflösung 0.4 ms (Sonne: 0.6 s).

Eine Motivation bei der Wahl einer Effektivtemperatur von 11300 K war die Tatsache, daß Mischungswegmodelle für diese Temperatur eine effektive Wasserstoffkonvektionszone voraussagen. Das Startmodell für die hydrodynamische Simulation

[ Plot created: Monday 25-NOV-1991 11:45:11 ]

[ Data file: SSS:ISUPAS079.HD BACKUP\JZ66D02 29.F15,1 created 91-11-24 06:36:35 ]

DA  $T_{eff} = 11300 \text{ Kelvin}$   $\log_{10} g = 8.00$

Model Code: Z66D02

Time Step: 9222 Time: 3.600 sec

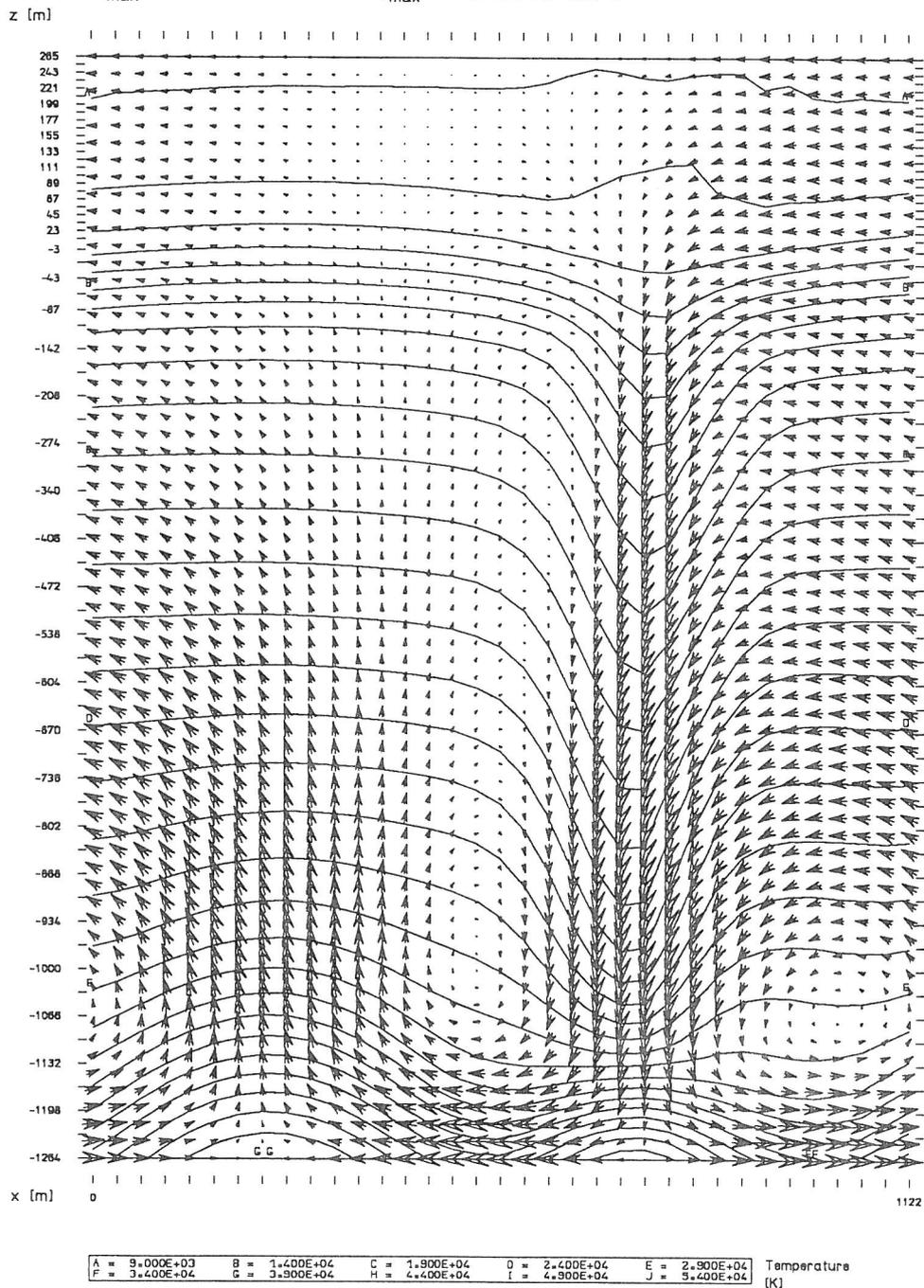
 $T_{max} = 39009.0 \text{ K}$   $v_{max} = 21.843 \text{ km s}^{-1}$ 

Abb. 70: Momentbild des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes des Modells für den DA Weißen Zwerg. Man beachte die geringe geometrische Ausdehnung des Simulationsvolumens und die hohen, bis an die Schallgeschwindigkeit heranreichenden Geschwindigkeiten.

ist aus einem planparallelen Mischungswegmodell abgeleitet worden. Dabei ist von einem Mischungsweg von  $l/H_p = 1$  ausgegangen worden. Man erwartet dann eine konvektiv instabile Zone, die sich von +60 m bis -470 m (siehe Abb. 70) erstreckt. Dies entspricht 2.4 Druckskalenhöhen. Das Simulationsvolumen erstreckt sich von +265 m bis -1264 m. Die Konvektionszone sollte damit vollständig innerhalb des Simulationsvolumens liegen. Einem gewissen Überschießen der konvektiven Strömungen am oberen und unteren Rand der Konvektionszone wäre zusätzlich Raum gegeben. Die Mischungswegmodelle sagen voraus, daß innerhalb der Konvektionszone ca. 80 % des gesamten Energieflusses konvektiv transportiert wird. Demnach besteht hier die Möglichkeit, eine Konvektionszone, in der ein effektiver konvektiver Energietransport stattfindet, über ihre ganze vertikale Erstreckung zu modellieren. Da die Schichtung in großen Tiefen gegenüber Konvektion stabil sein sollte, ist ein geschlossener unterer Rand gewählt worden.

Das Startmodell der HD-Simulation besaß eine planparallele Druck- und Temperaturstruktur, die aus einer 1-D Modellatmosphäre mit  $l/H_p = 1$  abgeleitet wurde. Zusätzlich wurde im konvektiv instabilen Gebiet ein willkürliches Geschwindigkeitsfeld vorgegeben. Die Maximalgeschwindigkeit betrug dabei 2.8 km/s. Das Modell zeigte in seiner zeitlichen Entwicklung ein rasches Anwachsen der Geschwindigkeiten. Ferner reichte die vertikale Ausdehnung des Simulationsvolumens nicht aus, um statische Verhältnisse am unteren Rand einzustellen. Die Ausdehnung ist daraufhin auf die nach Abb. 70 erhöht worden. Die zeitliche Entwicklung dieses erweiterten Modells ist bislang über 4.0 s verfolgt worden. Abb. 70 stellt einen typischen Strömungszustand dar. Ein wesentliches Ergebnis ist offenbar, daß auch jetzt die Tiefe des Simulationsvolumens nicht ausreicht, um konvektiv stabile Verhältnisse am unteren Rand zu gewährleisten. Es zeigen sich in der tropfenförmigen Abwärtsströmung bis kurz oberhalb des unteren Randes noch Geschwindigkeiten um 20 km/s. Erst der geschlossene untere Rand stoppt die Strömung.

Betrachtet man den Entropiegradienten im HD-Modell in großen Tiefen, findet man, daß die Schichtung bis an den unteren Rand konvektiv instabil ist. Das Geschwindigkeitsfeld in den großen Tiefen ist also nicht Ausdruck eines starken Overshootings am unteren Rand einer Konvektionszone, die durch  $l/H_p = 1$  gegeben ist. Vielmehr weist das Verhalten auf die Unsicherheit in der Vorgabe des Mischungswegparameters hin. Mischungswegmodelle unter Zugrundelegung eines größeren Mischungswegparameters besitzen eine tiefere Konvektionszone. Bei  $\alpha = 2$  erstreckt sich die konvektiv instabile Zone bis -1050 m, bei  $\alpha = 3$  sogar über den unteren Rand des Simulationsvolumens nach Abb. 70 hinaus. Es stellt sich die Frage, inwieweit das HD-Modell durch ein Mischungswegmodell mit geeignetem gewähltem Mischungswegparameter wiedergegeben werden kann. In nächsten Abschnitt gehen wir hierauf näher ein.

An dieser Stelle sei auf zwei Unzulänglichkeiten des HD-Modells hingewiesen. Wie wir gesehen haben, liegt der untere — geschlossene — Rand des Modells in konvektiv instabilen Schichten. Hier wird ein radiativer Energiefluß von  $\sigma T_{\text{eff}}^4$  eingespeist. Zusätzlich kommt aufgrund der Instabilität ein konvektiver Beitrag hinzu, der durch den Wärmeaustausch auf Skalen, die nicht durch das räumliche Gitter aufgelöst sind, verursacht wird. Im Endeffekt ist der am unteren Rand einströmende Energiefluß um 30 % zu hoch. Weiterhin beträgt die thermische Zeitskala, auf der sich ein Flußgleichgewicht einstellt, für die HD-Schichtung 3.5 s. Wegen der ungünstigen Wahl des Mischungsweges bei der Konstruktion des Startmodells, war es verhältnismäßig weit vom Gleichgewicht entfernt. Die bisher simulierte Zeit von 4.0 s reicht noch nicht zur Einstellung des Flußgleichgewichts aus. Als Konsequenz findet man

einen emergenten Strahlungsfluß, der sich noch zeitlich langsam ändert. Für die Auswertung, die im nächsten Abschnitt vorgenommen wird, wird deshalb so verfahren, daß nur der obere Teil des Simulationsvolumens bis  $z = -640$  m (siehe Abb. 70) entsprechend einer optischen Tiefe  $\lg \tau_R = 2.0$  betrachtet wird. Er besitzt annähernd einen einheitlichen Fluß. Um ihn zu bestimmen, ist über die letzten 1.1 s des simulierten Zeitraums gemittelt worden. Nach Tabelle 8 beträgt die Effektivtemperatur über diesen Zeitraum 11800 K statt der vorgegeben 11300 K. Die für diese Zeitspanne berechneten mittleren Schichtungen werden daher mit 1-D Modellen mit einer Effektivtemperatur von 11800 K verglichen.

### 6.5.2 Mittlere Schichtungen und Mischungswegmodelle

Abb. 71 zeigt die mittlere Temperaturschichtung des HD-Modells für den Weißen Zwerg. Auffällig ist der stetige Verlauf des Temperaturprofils, der Übergang von der Photosphäre in Gebiete mit  $\lg \tau_R > 0$  ist nicht ausgezeichnet. In allen Tiefen findet man merkliche Temperaturfluktuationen. Die Randtemperatur der Schichtung bei  $\lg \tau_R = -2.8$  ist um 800 K kühler als die eines Strahlungsgleichgewichtsmodells. Abb. 72 zeigt die auftretenden Heizraten. In Gebieten  $\lg \tau_R < -1.7$  liegen im Mittel positive Heizraten vor. D.h. auch hier kühlt konvektives Overshooting die höhere Photosphäre, was durch eine entgegenwirkende radiative Heizung kompensiert wird. Das ausgeprägte Minimum in der Heizrate um  $\lg \tau_R = 0.1$  ist Ausdruck der Abstrahlung, die am oberen Rand der auftretenden Konvektionszone stattfindet.

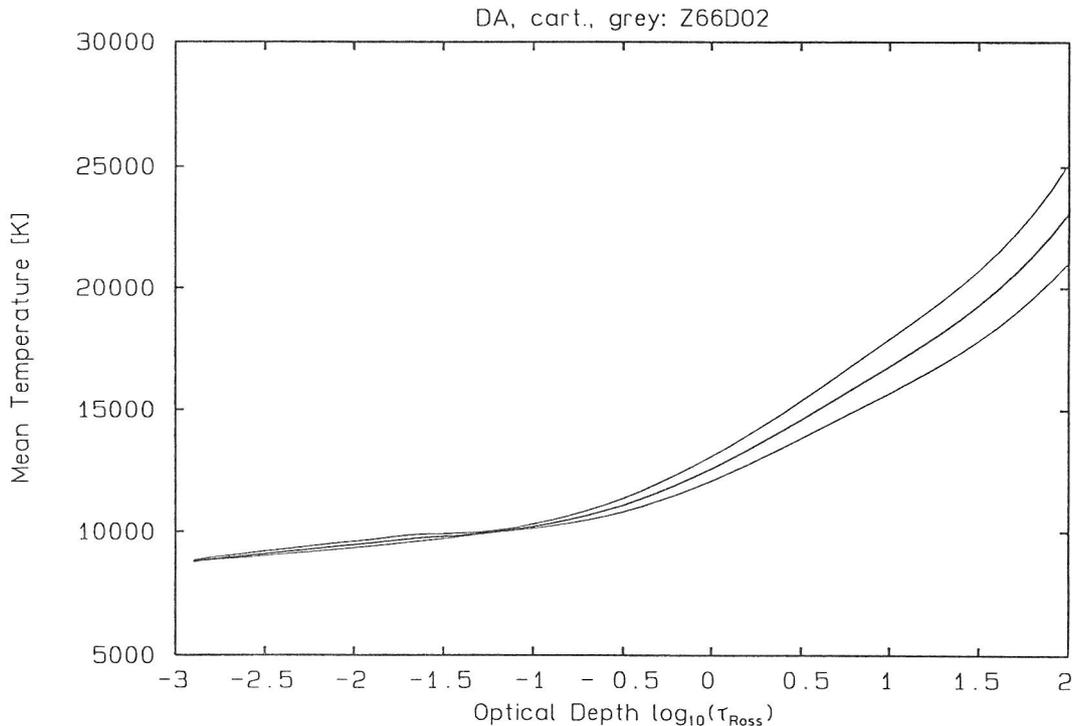
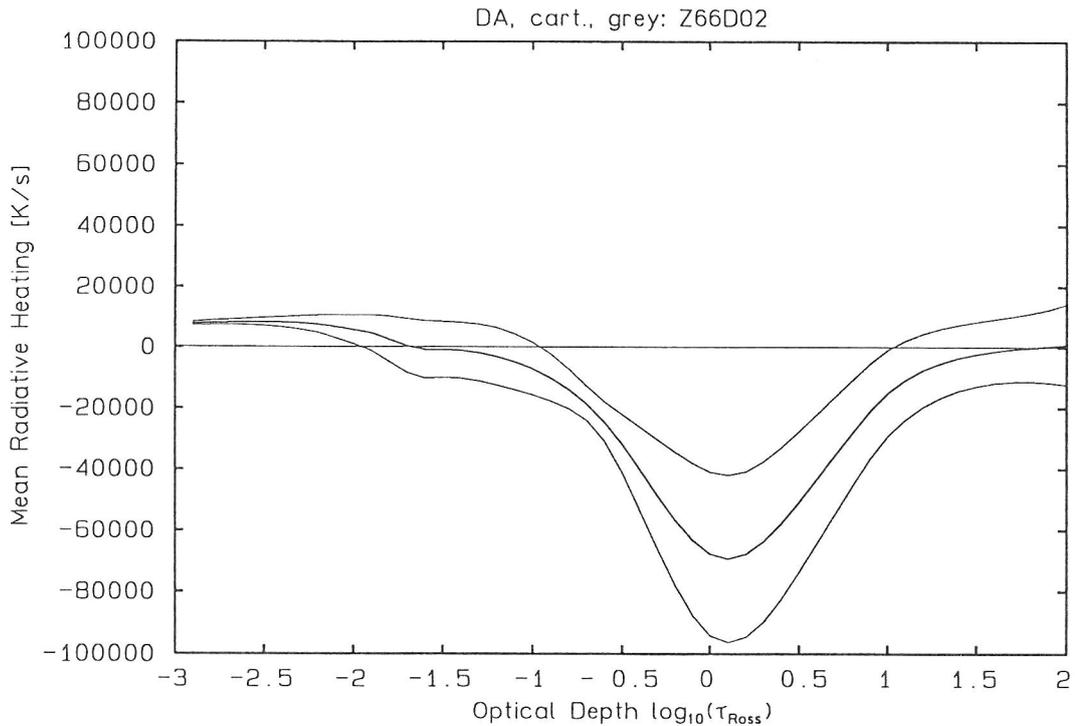


Abb. 71: Räumlich und zeitlich gemittelte Temperaturschichtungen des grauen HD-Modells für den Weißen Zwerg. Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Temperatur in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[T] \pm \sigma[T]$  und geben ein Maß für die auftretenden Temperaturfluktuationen.

Zum Vergleich mit Abb. 71 sind in Abb. 73 drei Temperaturschichtungen aus 1-D Modellatmosphären gegenübergestellt, die mit unterschiedlichen Mischungswegparametern berechnet sind. In diesen Mischungswegmodelle sind für den Strahlungstransport graue Rosseland-Opazitäten zugrundegelegt. Der benutzte Programmcode



**Abb. 72:** Räumlich und zeitlich gemittelte radiative Heizraten des grauen HD-Modells für den Weißen Zwerg gemäß Gleichung (5.1). Die mittlere Kurve stellt jeweils den Erwartungswert der Rate in der betreffenden Tiefe dar. Die beiden äußeren Kurven entsprechen jeweils  $E[R] \pm \sigma[R]$  und geben ein Maß für die auftretenden Fluktuationen der Heizrate.

stammt von D. Koester (siehe KOESTER ET AL., 1979), die Modellatmosphären sind von S. Jordan berechnet und dem Autor freundlicherweise zur Verfügung gestellt worden. Beim Vergleich der HD- und Mischungswegschichtungen stellt man fest, daß der Temperaturverlauf im Bereich  $\lg \tau_R < 0.5$  am besten mit einem Mischungswegparameter  $\alpha \approx 1.2$  angepaßt werden kann. In den tiefer liegenden Gebieten ist zur Anpassung ein zunehmend größerer Mischungswegparameter vonnöten. So würde die Temperatur der HD-Schichtung bei  $\lg \tau_R = 2.0$  durch eine Mischungswegschichtung mit  $\alpha \approx 2.5$  wiedergegeben.

Die Abbildungen 74 und 75 stellen die Verhältnisse für die konvektiven Geschwindigkeiten dar. Die konvektiven Geschwindigkeiten für verschiedene Mischungswege nach Abb. 75 veranschaulichen die Zunahme vor allem der Tiefenausdehnung der Konvektionszone mit zunehmenden Mischungsweg. Ein Mischungswegparameter  $\alpha = 1$  ist deutlich zu klein, um die aus Abb. 74 ersichtliche Ausdehnung der Konvektionszone im HD-Modell bis mindestens  $\lg \tau_R = 2.0$  wiedergeben zu können. Es zeigt sich im HD-Modell bis in diese Tiefe noch keine Abnahme der mittleren Vertikalgeschwindigkeiten. Insgesamt sind in Abb. 75 alle drei angegebenen Verläufe der konvektiven Geschwindigkeiten wenig adäquat, das Geschwindigkeitsprofil aus dem HD-Modell zu beschreiben. Auch die Unsicherheit in der Festlegung der Effektivtemperatur des HD-Modells ändert daran nichts. Es sind zur Kontrolle Mischungswegmodelle mit festem Mischungswegparameter  $\alpha = 1$  und um  $\pm 300$  K variiertes Effektivtemperatur betrachtet worden. Die geänderte Effektivtemperatur wirkt sich wesentlich schwächer auf die resultierende Temperatur- und Geschwindigkeitsstruktur aus, als es bei Variation des Mischungswegs der Fall ist.

Obwohl die bislang erzielten Ergebnisse vorläufiger Natur sind, soll im folgenden auf eine interessante Interpretationsmöglichkeit aufmerksam gemacht werden. Ver-

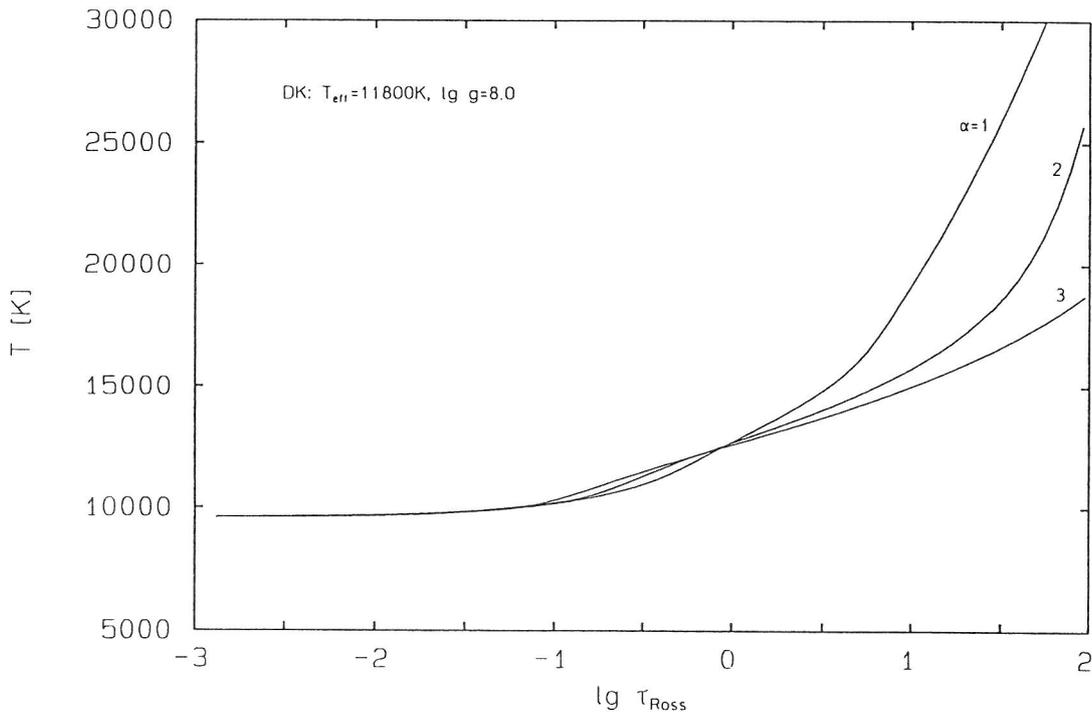


Abb. 73: Temperaturschichtungen für die Atmosphäre des Weißen Zwergs aus Mischungswegmodellen für  $T_{\text{eff}} = 11800$  K und  $\lg g = 8.0$ . Aufgetragen sind die Verläufe für drei verschiedene Mischungswegparameter  $\alpha = l/H_p$ . Zur Berechnung der Modellatmosphären sind graue Rosseland-Opazitäten zugrundegelegt.

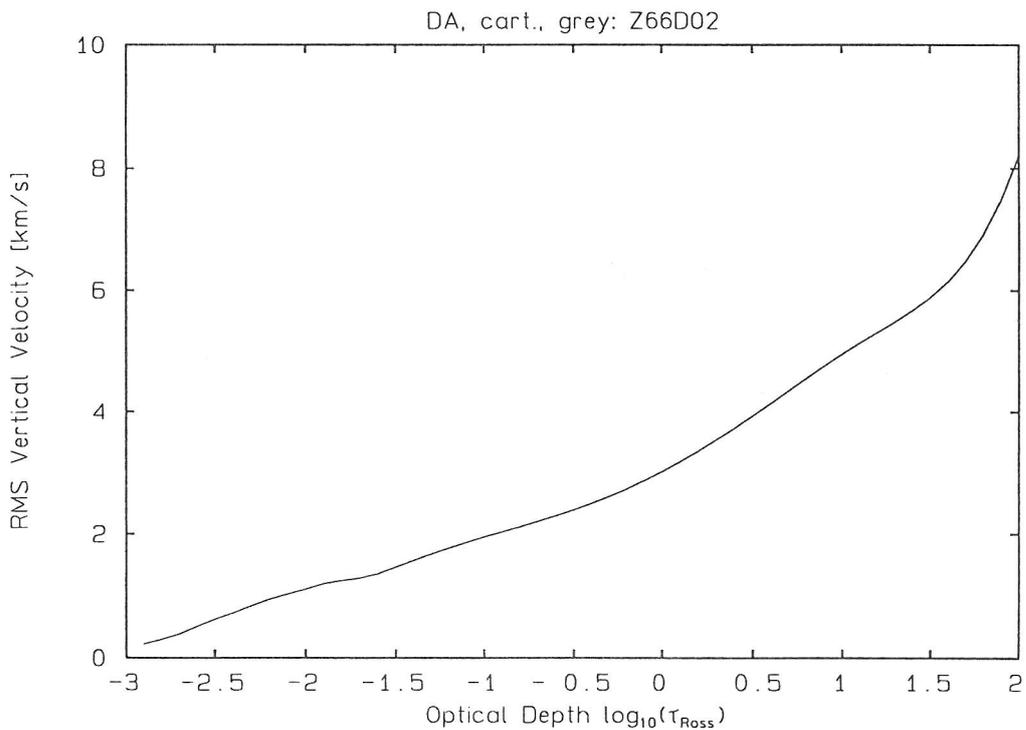


Abb. 74: Räumliches und zeitliches RMS-Mittel der vertikalen Geschwindigkeitskomponente für das HD-Modell des Weißen Zwergs.

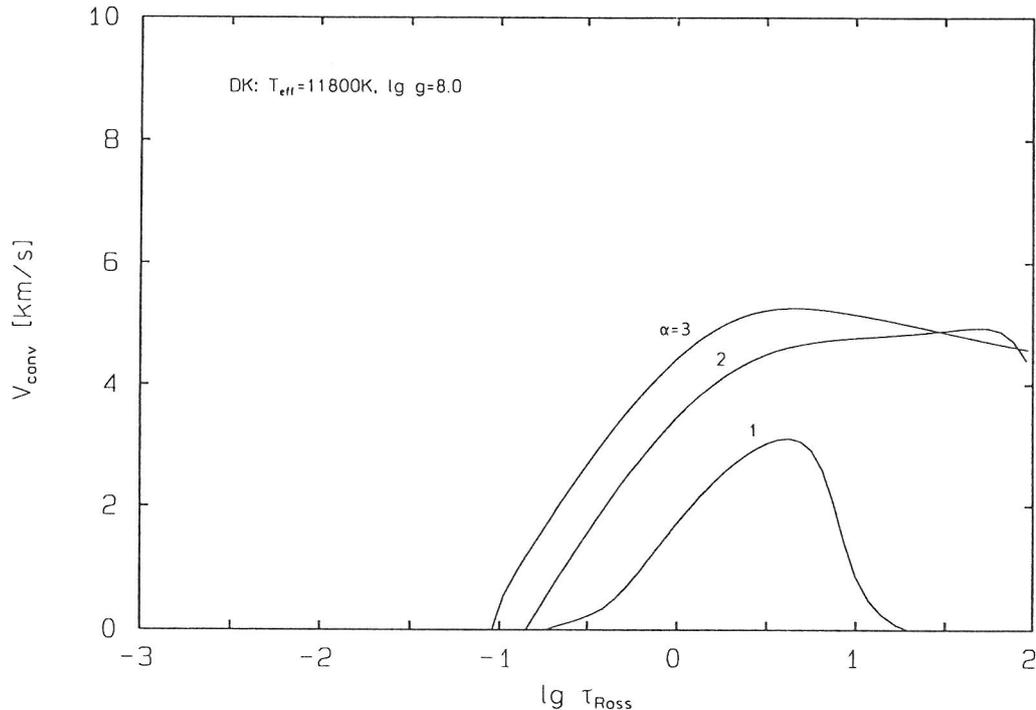


Abb. 75: Konvektive Geschwindigkeiten für die Atmosphäre des Weißen Zwergs aus Mischungswegmodellen für  $T_{\text{eff}} = 11800 \text{ K}$  und  $\lg g = 8.0$ . Aufgetragen sind die Verläufe für drei verschiedene Mischungswegparameter  $\alpha = l/H_p$ . Zur Berechnung der Modellatmosphären sind graue Rosseland-Opazitäten zugrundegelegt.

gleicht man empirisch aus Strömgen-Photometrie gewonnene Zweifarbandiagramme mit theoretischen Diagrammen, die aus Mischungswegmodellen abgeleitet sind, zeigt sich, daß eine befriedigende Übereinstimmung nur für eine Wahl des Mischungswegparameters von  $\alpha < 2$  erzielt werden kann (BERGERON ET AL., 1991). Die photosphärische Temperaturstruktur weist also auf eine *moderate Effizienz* des konvektiven Energietransportes hin. DA Weiße Zwerge mit Effektivtemperaturen zwischen etwa 11000 K und 13000 K zeigen Helligkeitsvariationen, die auf nichtradiale Pulsationen dieser Objekte zurückgeführt werden. Man bezeichnet den Bereich des Hertzsprung-Russell-Diagramms, in dem diese Pulsationen Weißer Zwerge auftreten, als *ZZ Ceti-Instabilitätsstreifen*. Theoretische Pulsationsrechnungen für solche ZZ Ceti-Objekte können nun den beobachteten Effektivtemperaturbereich, in dem Pulsationen auftreten, nur wiedergeben, wenn zur Beschreibung der Konvektion in der Hülle des Weißen Zwergs eine *hohe Effizienz* der Konvektion angenommen wird (siehe BERGERON ET AL., 1991 und zu theoretischen Pulsationsrechnungen TASSOUL ET AL., 1990). Die Ergebnisse weisen auf einen Mischungswegparameter hin, der in der Hülle deutlich größer als zwei ist. Bergeron et al. sprechen aufgrund dieser widersprüchlichen Befunde von einer inneren Inkonsistenz, die die Beschreibung der Konvektion in Weißen Zwerge durch Mischungswegmodelle besitzt.

Das hier präsentierte HD-Modell besitzt eine Effektivtemperatur, die für ZZ Ceti-Objekte typisch ist. Betrachtet man die oben dargelegte Problematik im Lichte der hydrodynamischen Modellrechnungen, so löst sich der Widerspruch in den halbempirischen<sup>16</sup> Ergebnissen auf. Das HD-Modell besitzt eine Temperaturschichtung, die in der Photosphäre einem niedrigen, in den tieferen Bereichen einem hohen

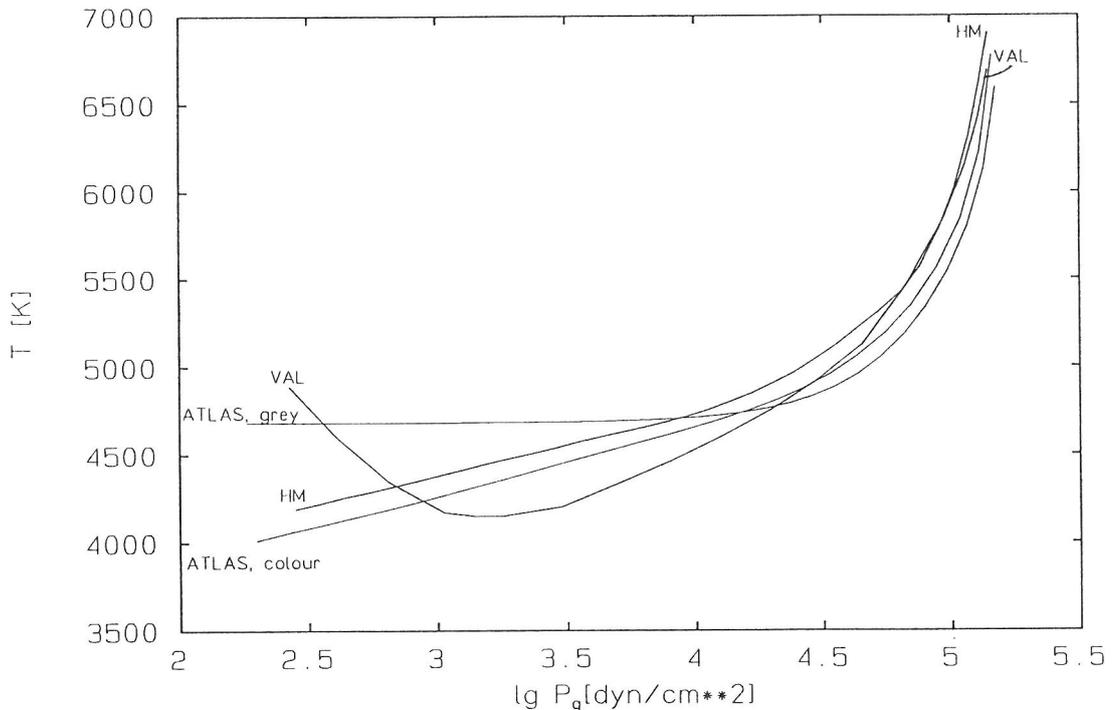
<sup>16</sup> Das Adjektiv „halbempirisch“ soll andeuten, daß die Ergebnisse nicht aus Beobachtungen allein gewonnen werden, sondern daß dabei auch theoretische Modellvorstellungen herangezogen werden.

Mischungswegparameter entspricht. Die Parametrisierung der Effizienz des konvektiven Energietransportes, wie ihn die Mischungswegtheorie für diese Objekte liefert, ist nach den hier gewonnenen Ergebnissen über größere Tiefenbereiche mit einem festen Mischungswegparameter einfach unzureichend.

## 7 Fazit

In den vorangegangenen Kapiteln wurde das Zusammenwirken von Hydrodynamik und Strahlungstransport in verschiedenen Spektraltypen studiert. Der Vergleich von grauem und nichtgrauem Strahlungstransport diente dabei dem Ziel, die Schwächen, die eine graue Beschreibung des Strahlungstransportes aufweist, herauszuarbeiten. Damit wird eine bessere Einschätzung von Resultaten, die in „grauen“ Simulationen erzielt werden, ermöglicht. Eine wesentliche Erkenntnis war dabei sicher, daß eine graue Beschreibung des Strahlungstransportes ausreichend ist, solange nicht eine Modellierung der Temperaturstruktur der höheren Photosphäre (ungefähr  $\lg \tau_R < -2$ ) oder eine sehr präzise Erfassung des Übergangs von optisch dicken nach optisch dünnen Gebieten (Kontraste) angestrebt sind. Dieses Ergebnis ist nützlich, aber eher verfahrenstechnischer Natur.

Die Ergebnisse unter Zugrundelegung nichtgrauen Strahlungstransports lassen einen Vergleich mit Beobachtungen wünschenswert erscheinen. Die Berücksichtigung der Nichtgrauheit geschieht natürlich in der Hoffnung, die Simulationen dadurch realistischer zu gestalten und eine bessere Wiedergabe der Beobachtungsbefunde zu erreichen. Obwohl nicht eigentlich Gegenstand dieser Arbeit, soll im folgenden ein kurzer Vergleich zwischen empirischen Temperaturschichtungen und den theoretischen Ergebnissen der HD-Simulationen für die Sonne vorgenommen werden, um zukünftige Perspektiven aufzuzeigen. Wie wir gesehen haben, erhält man in den hydrodynamischen Rechnungen stets photosphärische Temperaturschichtungen, die erheblich kühler als die Strahlungsgleichgewichtsschichtungen sind.



**Abb. 76:** Photosphärische Temperaturschichtungen für die Sonne. Die mit VAL und HM bezeichneten Kurven stellen empirische Schichtungen (siehe Text) dar. Die mit ATLAS<sub>grey</sub> bezeichnete Kurve gibt ein graues, die mit ATLAS<sub>colour</sub> bezeichnete Kurve ein nichtgrauem (1220 Frequenzpunkte) ATLAS6-Modell wieder.

Abb. 76 stellt verschiedene empirische und theoretische Temperaturschichtungen für die Sonnenphotosphäre gegenüber. Die mit HM bezeichnete Kurve stellt eine empirische Schichtung nach HOLWEGER und MÜLLER (1974), die mit VAL bezeichnete

Kurve eine entsprechende nach VERNAZZA ET AL. dar. Zusätzlich eingezeichnet sind wieder eine graue bzw. nichtgraue (1220 Frequenzpunkte) ATLAS6-Schichtung. In dem nichtgrauen ATLAS6-Modell findet man eine optische Tiefe von  $\lg \tau_R = -4.0$  bei  $\lg p_g = 3.0$ . Die Temperaturen der hydrodynamischen Sonnenmodelle liegen in dieser Tiefe deutlich unterhalb 4000 K. Gerade mit Blick auf die HM-Schichtung, die sogar *heißer* als die nichtgraue theoretische Strahlungsgleichgewichtsschichtung ist, bleibt einem beim Vergleich nicht die Feststellung erspart, daß *die hydrodynamischen Schichtungen deutlich zu kühle Temperaturen liefern*. Verbleibende Ungenauigkeiten im nichtgrauen Strahlungstransport können diese Diskrepanz nicht erklären.

Eine Milderung der Diskrepanz ist durch eine verbesserte statistische Auswertung der hydrodynamischen Modelle auf der optischen Skala zu erwarten. Die Auswahl-effekte, die in den Temperaturschichtungen dieser Arbeit vorhanden sind, führen zu einer Bevorzugung niedriger Temperaturen. Diese Effekte sollten daher in Zukunft so weit möglich unterdrückt werden. Temperaturen oberhalb der Strahlungsgleichgewichtstemperatur wird man aber dabei trotzdem kaum erhalten.

Als Erklärung bleibt die Tatsache, daß die empirischen Schichtungen Mittel über die gesamte Sonnenphotosphäre darstellen. Neben ruhigen tragen auch magnetisch aktive Gebiete zur Gesamtschichtung bei. Man kann vermuten, daß Regionen in denen Magnetfelder eine Rolle spielen, eine höhere photosphärische Temperatur besitzen, da Magnetfelder das Overshooting behindern können. Insofern wird in den hier präsentierten HD-Modellen nur die kühle Komponente der Sonnenphotosphäre erfaßt. Die heiße Komponente in magnetisch aktiven Gebieten bleibt unberücksichtigt, was zu den geringen photosphärischen Randtemperaturen führt. *Magnetohydrodynamische* Modelle der Sonnenphotosphäre unter Einschluß — nichtgrauen — Strahlungstransports sind daher sicher *eine* Aufgabe, die in Zukunft angegangen werden muß.

## A Literaturverzeichnis

- BERGERON, P., WESEMAEL, F., FONTAINE, G.: 1991, *On the influence of the convective efficiency on the determination of the atmospheric parameters of DA White Dwarfs*, im Druck
- BRAY, R.J., LOUGHHEAD, R.E., DURRANT, C.J.: 1984, *The Solar Granulation*, 2. Auflage, Cambridge University Press
- BUTLER, D.S.: 1960, *Proc. Roy. Soc. London* **255A**, 232
- CARBON, D.F.: 1974, *Astrophys. J.* **187**, 135
- CATTANEO, F., BRUMMELL, N.H., TOOMRE, J., MALAGOLI, A., HURLBURT, N.E.: 1991, *Astrophys. J.* **370**, 282
- CHAN, K.L., SOFIA, S.: 1986, *Astrophys. J.* **307**, 222
- CHAN, K.L., SOFIA, S.: 1989, *Astrophys. J.* **336**, 1022
- DEARDORFF, J.W.: 1971, *J. Comp. Phys.* **7**, 120
- DRAVINS, D.: 1987, *Astron. Astrophys.* **172**, 200
- FREYTAG, B.: 1991a, private Mitteilung
- FREYTAG, B.: 1991b, *Spektroskopie solarer Granulationszellen und Vergleich mit numerischen Simulationen*, Diplomarbeit, Universität Kiel
- GIGAS, D.: 1986, *Astron. Astrophys.* **165**, 170
- GIGAS, D.: 1988, in: *The impact of Very High S/N Spectroscopy on Stellar Physics*, Proc. IAU Symposium No. 132, Herausgeber: G. Cayrel de Strobel, M. Spite, Seite 395
- GIGAS, D.: 1989, in: *Solar and Stellar Granulation*, Herausgeber: Rutten, R.J. und Severino G., Kluwer Academic Publisher, Dordrecht – Boston – London, Seite 533
- GIGAS, D.: 1990, *Die Atmosphäre von Wega*, Dissertation, Universität Kiel
- HOLWEGER, H., MÜLLER, E.A.: 1974, *Solar Phys.* **39**, 19
- HOLWEGER, H., GEHLSSEN, M., RULAND, F.: 1978, *Astron. Astrophys.* **70**, 537
- HOLWEGER, H.: 1979, *Abundances of the Elements in the Sun*, in: *Les Elements et leurs Isotopes dans l'Univers*, Université de Liège, Seite 117
- HOLWEGER, H., KNEER, F.: 1989, in: *Solar and Stellar Granulation*, Herausgeber: Rutten, R.J. und Severino G., Kluwer Academic Publisher, Dordrecht – Boston – London, Seite 173
- HURLBURT, N.E., TOOMRE, J., MASSAGUER, J.M.: 1984, *Astrophys. J.* **282**, 557
- HURLBURT, N.E., TOOMRE, J., MASSAGUER, J.M.: 1986, *Astrophys. J.* **311**, 563
- JORDAN, S.: 1991, private Mitteilung

- KALKOFEN, W., ULMSCHNEIDER, P.: 1977, *Astron. Astrophys.* **57**, 193
- KOESTER, D., SCHULTZ, H., WEIDEMANN V.: 1979, *Astron. Astrophys.* **76**, 262
- KRÜSS, A.: 1991, *Die Brunt-Väisälä-Frequenz als Resonanzfrequenz in stellaren Atmosphären*, Dissertation, Universität Kiel
- KURUCZ, R.L.: 1970, *ATLAS: A Computer Program for Calculating Model Stellar Atmospheres*, Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 309
- KURUCZ, R.L.: 1979, *Astrophys. J. Suppl.* **40**, 1
- KURUCZ, R.L.: 1991, in: *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, Herausgeber: L. Crivellari, I. Hubeny und D. G. Hummer, Kluwer Academic Publishers Dordrecht – Boston – London, Seite 441
- LANDAU, L.D., LIFSCHITZ, E.M.: 1981, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 6, Hydrodynamik*, 4. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin
- LUDWIG, H.-G., STEFFEN, M., GIGAS., D., KRÜSS, A.: 1989, in: *Numerische Simulation solarer Granulationszellen mit unterschiedlicher horizontaler Ausdehnung*, Publikation der Sternwarte Kiel Nr. 501, Juni 1989
- MIHALAS, D.: 1970, *Stellar Atmospheres*, W. H. Freeman and Company, San Francisco
- MIHALAS, D.: 1970, *Stellar Atmospheres*, 2. Auflage, W. H. Freeman and Company, San Francisco
- MIHALAS, D., MIHALAS, B.W.: 1984, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, New York, Oxford
- NORDLUND, Å.: 1982, *Astron. Astrophys.* **107**, 1
- NORDLUND, Å.: 1984, in: *Small-Scale Dynamical Processes in Quiet Stellar Atmospheres*, Herausgeber: S. L. Keil, Sunspot, NM88349, Seite 181
- NORDLUND, Å.: 1985, in: *Theoretical Problems in High Resolution Solar Physics*, Herausgeber: H.U. Schmidt, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München MPA 221, Seite 1
- NORDLUND, Å., DRAVINS, D.: 1990, *Astron. Astrophys.* **228**, 155
- PEYTREMANN, E.: 1974, *Astron. Astrophys.* **33**, 203
- RICHARDSON, D.J.: 1964, *Meth. Comp. Phys.* **3**, 295
- SOFIA, S., CHAN, K.L.: 1984, *Astrophys. J.* **282**, 550
- SPRUIT, H.C., NORDLUND, Å, TITLE, A.M.: 1990, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **28**, 263
- STEFANIK, R.P., ULMSCHNEIDER, P., HAMMER, R., DURRANT, C.J.: 1984, *Astron. Astrophys.* **134**, 77
- STEFFEN, M.: 1989, in: *Solar and Stellar Granulation*, Herausgeber: Rutten, R.J. und Severino G., Kluwer Academic Publisher, Dordrecht – Boston – London, Seite 425

- 
- STEFFEN, M.: 1990, *Astron. Astrophys.* **239**, 443
- STEFFEN, M.: 1991a, private Mitteilung
- STEFFEN, M.: 1991b, in: *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, Herausgeber: L. Crivellari, I. Hubeny und D. G. Hummer, Kluwer Academic Publishers Dordrecht – Boston – London, Seite 247
- STEFFEN, M., MUCHMORE, D.: 1988, *Astron. Astrophys.* **193**, 281
- STEFFEN, M., FREYTAG, B.: 1991, in: *Reviews in Modern Astronomy, Vol. 4*, Herausgeber: G. Klare, Springer Verlag, Seite 43
- STEFFEN, M., LUDWIG, H.-G., KRÜSS, A.: 1989, *Astron. Astrophys.* **213**, 371
- STEFFEN, M., GIGAS, D., HOLWEGER, H., KRÜSS, A., LUDWIG, H.-G.: 1990, in: *Solar Photosphere: Structure, Convection and Magnetic Fields*, Herausgeber: J.O. Stenflo, IAU, Seite 213
- STEFFEN, M., HOLWEGER, H., KRÜSS, A.: 1991, in: *Mechanisms of Chromospheric and Coronal Heating*, Herausgeber: P. Ulmschneider, Springer Verlag, Seite 380
- STEIN, R.F., NORDLUND, Å, KUHN, J.R.: 1989, in: *Solar and Stellar Granulation*, Herausgeber: Rutten, R.J., Severino G., Kluwer Academic Publisher, Dordrecht – Boston – London, Seite 381
- STIX, M.: 1989, *The Sun*, Springer Verlag
- TASSOUL, M., FONTAINE, G., WINGET, D.E.: 1990, *Astrophys. J. Suppl.* **72**, 335
- UNNO, W., SPIEGEL, A.S.: 1966, *Publ. A. S. Japan* **18**, 85
- UNSÖLD, A.: 1930, *Zs. f. Astrophys.* **1**, 138
- UNSÖLD, A.: 1968, *Physik der Sternatmosphären*, Springer Verlag
- VERNAZZA, J.E., AVRETT, E.H., LOESER, R.: 1976, *Astrophys. J. Suppl.* **30**, 1
- VITENSE, E.: 1953, *Zs. f. Astrophys.* **32**, 135

## B Danksagungen

Die Durchführung des Projektes, das in dieser Arbeit dokumentiert wird, wäre sicher nicht ohne die zwanglose und kollegiale Atmosphäre, die am Institut für Theoretische Physik und Sternwarte der Christian-Albrechts-Universität herrscht, möglich gewesen. Allen Kieler Kollegen danke ich für ihre stete Diskussions- und Hilfsbereitschaft.

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Hartmut Holweger, danke ich für die Themenstellung, fortlaufende Betreuung und Ermunterung während der Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt Matthias Steffen, der in allen physikalischen und weniger physikalischen Fragen mein erster Ansprechpartner war. Die vielen Gespräche, für die er sich immer Zeit nahm, waren eine unschätzbare Hilfe. Ihm wie meinem Kollegen Bernd Freytag danke ich für eine kritische Durchsicht meiner Arbeit. Matthias, Bernd und meinen weiteren Kollegen aus der Arbeitsgruppe Andrea Krüß, Sven Stürenburg, Wolfgang Steenbock sowie früher Detlef Gigas und Michael Lemke danke ich für die Klärung mancher Frage in den wöchentlichen Besprechungen und ihre Hilfsbereitschaft bei der Lösung der „täglichen“ Probleme, wozu unter anderem Betriebssysteme, Plotsoftware, Netzwerke, Textverarbeitung und ATLAS6 zählten. Stefan Jordan und Prof. Volker Weidemann bin ich für die Hilfestellung bei der Bearbeitung des Weißen Zwergs zu Dank verpflichtet. Prof. Kurt Hunger möchte ich danken, da nicht zuletzt sein Einsatz mir die Möglichkeit eröffnete, an einer Fortbildung in Portugal teilzunehmen. Günther Jonas gebührt mein Dank für seine schnelle Hilfe bei gerätetechnischen Schwierigkeiten.

Ich möchte mich bei Maria Ebert bedanken, die sich der Mühe unterzog, weite Passagen der Arbeit nach Tippfehlern durchzugehen. Schließlich schulde ich Dank meiner Großmutter Lisbeth Rohde sowie meinen Eltern Gudrun und Klaus Ludwig, die in der vergangenen Zeit manch finanziellen Engpaß bei mir überbrückten.

Die hydrodynamischen Rechnungen für diese Arbeit wurden auf der Cray X-MP 216 des Kieler Rechenzentrums sowie auf dem Siemens/Fujitsu VP200EX, später S400/40 des Regionalen Rechenzentrums für Niedersachsen, Hannover, durchgeführt. Die Datenauswertung erfolgte auf den Universalrechnern des Kieler Rechenzentrums, das auch verschiedene grafische Ausgabegeräte zur Verfügung stellte. Einige Abbildungen dieser Arbeit wurden auf einer Sun Sparc 1+ Workstation erstellt.

Kiel, im Januar 1992

*Hans-Günter Ludwig*



# Lebenslauf

**Name:** Hans-Günter Ludwig

**Geburtstag:** 20. März 1962

**Geburtsort:** Flensburg, Schleswig-Holstein

**Staatsangehörigkeit:** deutsch

**Schule:** 1968–72 Besuch der DGS Munkbrarup bei Flensburg  
1972–1974 Besuch des Gymnasiums Goethe-Schule in Flensburg  
1974–81 Besuch des Gymnasiums Klaus-Harms-Schule in Kappeln

**Abitur:** April 1981 an der Klaus-Harms-Schule, Kappeln

**Immatrikulation:** Wintersemester 1981/82 an der CAU, Studienfach: Physik

**Vordiplom:** November 1983

**Diplomarbeit:** von November 1986 bis April 1989, 1 Jahr Stipendiat der  
Dr. Helmut Robert Gedächtnisstiftung

**Hauptdiplom:** April 1989, Gesamtnote „sehr gut“

**Dissertation:** seit Mai 1989, 2 Jahre Stipendiat aus Mitteln nach dem „Landesgesetz zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses“

## Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Abhandlung — abgesehen von der Beratung durch Prof. Dr. H. Holweger — nach Form und Inhalt eigenständig angefertigt habe. Die Arbeit ist bisher noch nicht veröffentlicht.

Kiel, den 7. Januar 1992

*H.-G. Ludwig*  
.....  
Hans-Günter Ludwig